

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS VII

en vue de l'obtention du Doctorat (Nouveau Régime)

Discipline : Physique

Spécialité : Champs, Particules, Matières

par

Christophe LETELLIER

<p style="text-align: center;">CARACTERISATION TOPOLOGIQUE et RECONSTRUCTION D'ATTRACTEURS ETRANGES</p>
--

soutenue le 10 Mai 1994 ¹

Membres du jury

- **Alain Arnéodo**, Directeur de Recherche C.N.R.S. à l'Université de Bordeaux 1
- **Michel Auvergne**, Chargé de Recherche C.N.R.S. à l'Observatoire de Meudon
- **Gérard Gouesbet**, Professeur à l'I.N.S.A. de Rouen
- **Bruno Maheu**, Professeur à l'Université de Rouen
- **Gabriel Mindlin**, Professeur adjoint à l'Université de Buenos Aeres (Argentine)
- **Yves Pomeau**, Directeur de Recherche C.N.R.S. à l'Ecole Normale Supérieure, Paris et Professeur à l'Université d'Arizona, Tucson (USA)
- **Michel Trinité**, Directeur de Recherche C.N.R.S. à l'Université de Rouen
- **Luc Valentin**, Professeur à l'Université de Paris VII

¹Le présent document est une version recompilée en 2008, après quelques modifications de présentation.

Je tiens à remercier **Alain Arnéodo, Michel Auvergne, Gabriel Mindlin, Yves Pomeau, Michel Trinité** et **Luc Valentin** d'avoir eu la gentillesse de porter un regard critique sur ce travail.

Je tiens à remercier plus particulièrement

Pascal Dutertre pour m'avoir initié au monde des orbites périodiques et des sciences humaines,

David Fulchiron pour avoir corrigé l'anglais des articles qui sont nés de ce mémoire,

Gérard Gouesbet pour la richesse du sujet de ce mémoire et la grande liberté dans les orientations de ce travail,

Gérard Gréhan pour son dynamisme rayonnant et sa complicité dans les moments difficiles,

Loïs Le Sceller d'avoir été un interlocuteur très critique durant son stage de DEA et d'avoir ainsi contribué à éclaircir certaines obscurités,

Bruno Maheu pour avoir contribué à la clarté de ce mémoire,

Siegfried Meunier-Guttin-Cluzel pour avoir consacré une partie de son temps à relire le manuscrit de ce mémoire et contribué à sa présentation par le développement d'outils graphiques,

Fabrice Onofri pour avoir contribué au dépistage des coquilles de ce mémoire,

Eric Ringuet pour les discussions d'une grande profondeur scientifique qui ont contribué au milieu vitalisant dont j'ai bénéficié,

ainsi que tous les membres du LESP² pour leur contribution à l'atmosphère agréable du laboratoire.

²Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Energétique des Systèmes et Procédés, UA CNRS 230, INSA de Rouen, Place Emile Blondel, BP 08, 76131 Mont Saint-Aignan cedex

Que restera-t-il demain des écrits des savants?... Seulement le mal qu'ils ont dit de ceux qui les ont précédés. On se souvient de ce qu'ils ont détruit dans la théorie des autres, mais ce qu'ils échafaudent eux-mêmes sera immanquablement détruit, ridiculisé même par ceux qui viendront après. Telle est la loi de la science [...]

Ce qui me fascine dans les sciences, c'est que j'y trouve la poésie suprême ; avec les mathématiques, le grisant vertige des nombres ; avec l'astronomie, l'énigmatique murmure de l'Univers. Mais de grâce, qu'on ne me parle pas de vérité !

Amin Maalouf, Samarcande

Table des matières

0	Introduction	11
I	Caractérisation topologique des attracteurs étranges	15
1	La cascade de doublements de période	17
1.1	Introduction	17
1.2	Topologie du doublement de période	19
1.2.1	Analyse de Floquet	19
1.2.2	Caractérisation topologique	22
1.2.3	Mécanisme du doublement de période	26
1.3	Dynamique symbolique	30
1.3.1	Notion	31
1.3.2	L'application de premier retour	33
1.3.3	Codage du doublement de période	37
1.4	Les "tresses"	40
1.4.1	Les patrons	40
1.4.2	Les tresses	43
1.4.3	Self-similarité du doublement de période	44
1.5	Conclusion	47
2	Le système de Rössler	51
2.1	Introduction	51
2.2	Le ruban simplement plié	53
2.2.1	Partition du ruban	54
2.2.2	Extraction du patron	57
2.3	Dynamique symbolique complète	62
2.3.1	Population d'orbites périodiques	62
2.3.2	Les travaux de Sil'nikov	65
2.3.3	Trajectoire homocline	65
2.4	Au delà du point de saturation	68
2.4.1	A trois lettres	68
2.4.2	A quatre lettres	75
2.4.3	Processus infini ?	80
2.5	Conclusion	85
3	Le système de Lorenz et sa symétrie	89
3.1	Introduction	89
3.2	La physique du système de Lorenz	90
3.3	Caractérisation topologique	94
3.3.1	Points fixes	94

3.3.2	Equivariance	96
3.3.3	Application de premier retour	97
3.3.4	Partition de l'attracteur	98
3.4	Population d'orbites périodiques	102
3.4.1	Dégénérescence	102
3.4.2	Population d'orbites périodiques	104
3.4.3	Vérification du patron	105
3.5	Dynamique symbolique à trois lettres	108
3.5.1	Application de premier retour	108
3.5.2	Caractérisation topologique	110
3.5.3	Population d'orbites périodiques	111
3.5.4	Vérification du patron	112
3.6	Spectres de puissance	114
3.6.1	La cohérence de phase	114
3.6.2	Les propriétés de mélange	116
3.6.3	Le problème	117
3.7	Conclusion	119
II Reconstruction des attracteurs étranges		123
4	Principe des Reconstructions	125
4.1	Introduction	125
4.2	Reconstruction de l'espace des phases	126
4.2.1	Le principe	126
4.2.2	Le choix de la dimension	127
4.3	Equivalence des variables?	128
4.3.1	Le rôle de la courbure	129
4.3.2	Différentes qualités de reconstruction	130
4.3.3	Théorème de Whitney	132
4.4	Applications	133
4.4.1	Le système de Rössler	135
4.4.2	Le système de Lorenz	138
4.4.3	Burke et Shaw	146
4.5	Conclusion	156
5	Reconstruction du champ de vecteurs	159
5.1	Introduction	159
5.2	Les différents systèmes de coordonnées	159
5.2.1	Les décalages temporels	159
5.2.2	L'analyse en composantes principales	161
5.2.3	Les dérivées	163
5.3	Les reconstructions globales	167
5.3.1	A partir des composantes principales	167
5.3.2	A partir des dérivées	168
5.3.3	Approximation de la fonction standard	170
5.4	Applications	173
5.4.1	Le système de Rössler	174
5.4.2	Le système de Lorenz	178
5.5	Reconstruction à partir d'orbites périodiques	184
5.5.1	Le ruban simplement plié	184
5.5.2	L'entonnoir	186

5.5.3	Limite de l'équivalence topologique	187
5.6	Conclusion	190
6	Reconstruction en présence de bruit	193
6.1	Introduction	193
6.2	Le bruit	196
6.2.1	Bruitage	196
6.2.2	Modification de l'espace des paramètres	197
6.2.3	Augmentation de la dimension	200
6.3	Le lissage	201
6.3.1	Les techniques	201
6.3.2	Simplification de la dynamique	202
6.4	Influence du taux d'information	205
6.4.1	Bruit et Estimation	205
6.4.2	La quantité d'information	205
6.4.3	Influence de l'échantillonnage	206
6.5	Nombre de coefficients	212
6.6	Conclusion	214
III	Applications à des systèmes expérimentaux	217
7	Topologie de systèmes physiques	219
7.1	Introduction	219
7.2	Les systèmes laser	219
7.2.1	Laser CO ₂	220
7.2.2	Laser RMN	221
7.3	Les réactions chimiques	222
7.3.1	Un chaos faiblement développé	224
7.3.2	Un chaos un peu plus développé	225
7.4	Conclusion	232
8	Du chaos dans les étoiles	237
8.1	Introduction	237
8.2	Un modèle d'étoile pulsante	238
8.2.1	Construction du patron	239
8.2.2	Validation par les orbites périodiques	241
8.3	Analyse en fréquence	246
8.4	Conclusion	246
9	Le chaos en electro-chimie.	249
9.1	Introduction	249
9.2	Electrolyse du Cuivre	249
9.2.1	Quelques propriétés de l'attracteur	250
9.2.2	Les orbites périodiques	251
9.2.3	Le patron	253
9.2.4	Validation algébrique	254
9.3	Electrolyse du Fer	255
9.4	Validation d'un modèle	257
9.5	Conclusion	258
10	Conclusion	263

Chapitre 0

Introduction

Le terme *chaos*, du latin *chaos* emprunté au grec *khaos*, est introduit dans la langue française en 1377 par Christine de Pisan¹. Dans la théologie païenne, le chaos représente la confusion générale des éléments avant leur séparation et leur arrangement pour former le monde². Dans la Genèse, chaos est la traduction canonique en grec du terme hébreux *tohu-wa-bohu* (synonyme de pagaïe en allemand) apparaissant dans le premier chapitre de la Bible. *Wa* signifie *et*, et *bohu* certainement la même chose que *tohu*. Puisque ce mot apparaît pour la première fois dans la Bible et qu'il n'y a pas de tradition orale continue, nous ne pouvons pas être certain de ce que "tohu" signifie. Une analogie possible est "sens dessus-dessous". Dans son dictionnaire philosophique, Voltaire fait une description de cette confusion existant avant la création : "La terre était tohu-bohu, et le vent de Dieu était sur les eaux". Dieu est alors vu comme "l'Esprit organisateur par qui le chaos s'ordonne"³. Par la suite, le chaos est toujours associé à une incompréhension des choses, à l'impossibilité de formuler une quelconque loi organisatrice d'un phénomène apparemment inextricable. Par exemple, "les objets paraissent sombres et en confusion le matin aux premières lueurs de l'aurore, mais ensuite ils semblent sortir comme d'un chaos"⁴. L'homme attribue naturellement un caractère divin à tout ce qu'il ne peut expliquer : Zeus, dieu de la foudre, perd toute sa crédibilité et cesse d'être invoqué dès lors que le phénomène auquel il est associé est expliqué⁵. Pourtant ces hommes qui se gaussent des croyances antiques retrouvent toute leur superstition lorsqu'ils sont confrontés à un phénomène qui dépasse leur entendement et suscite quelque peur. Ainsi au *XIX^e* siècle, la chaomancie⁶ sorte de divination faite au moyen d'observation sur l'air fait son apparition. Pourtant, en 1865, Victor Hugo⁷ le voit *comme tous les pêle-mêle, depuis les mêlées d'hommes qu'on nomme batailles jusqu'aux mêlées d'éléments qu'on nomme chaos*. Très inspiré, Victor Hugo⁸ fait une description du chaos marin où l'on retrouve les ingrédients essentiels de ce que regroupe le terme scientifique *chaos* de nos jours :

Essayer de vous rendre compte de ce chaos. Il est le récipient universel, réservoir pour les fécondations, creuset pour les transformations. Il amasse, puis disperse ; il dévore, puis crée. Il reçoit tous les égouts de la terre, et il les thésaurise. Il est solide dans la banquise, liquide dans le flot, fluide dans l'effluve, Comme matière il est masse, et comme force il est abstraction. Il égalise et manie les phénomènes. Il se simplifie par l'infini dans la combinaison. C'est à force de mélange

¹Dictionnaire étymologique Larousse

²Paul-Emile Littré, Dictionnaire de la langue française, 1866

³Daniel-Rops, cité dans le Dictionnaire de la langue française, *ibid.*

⁴Fénélon, Télémaque, chap. 24, *XVII^e* siècle

⁵par Benjamin Franklin au *XVIII^e* siècle

⁶du sens de *khaos*, immensité de l'espace

⁷in Les travailleurs de la mer, GF-Flammarion, p. 361, 1980

⁸*ibid.*, p368

et de trouble qu'il arrive à la transparence. La diversité soluble se fond dans son unité. Il a tant d'éléments qu'il est l'identité. Une de ses gouttes, c'est tout lui. Parce qu'il est plein de tempêtes, il devient équilibre.

Le chaos, partout présent, dont la complexité est issue d'un nombre infini de combinaisons simples, est admirablement pressenti dans la description de Victor Hugo. Cependant il faudra attendre l'aube du XX^e siècle et les travaux de Henri Poincaré sur le mouvement des astres dans l'espace et son fameux problème des trois corps pour une formulation plus scientifique. Henri Poincaré se trouve confronté à un phénomène aux solutions inextricables doté d'une importante sensibilité aux conditions initiales. Malheureusement avec l'avènement de la mécanique quantique, l'énigme proposée par H. Poincaré est remise au placard (sauf peut être pour les scientifiques russes qui, relativement coupés de la communauté scientifique, apporteront une contribution mathématique importante à ce problème). Ce n'est qu'en 1963 que Edward N. Lorenz, passionné par les mouvements de l'atmosphère et les ordinateurs, remet au goût du jour la *chaomancie*. Les scientifiques parlent alors de systèmes dynamiques non-linéaires, d'attracteurs étranges mais, déroutés par l'incroyable complexité des phénomènes rencontrés, usent fréquemment du terme chaos (signature de leur humilité face à la nature). La *chaologie*, spéculation sur le chaos, sur l'état primitif des choses, voit alors son pendant apparaître : la *chaonomie*, science des systèmes dynamiques non-linéaires complexes et imprédictibles.

Depuis, de nouveaux concepts sont apparus. Les solutions asymptotiques de certains systèmes dynamiques se nomment *attracteurs étranges chaotiques* et l'on sait que le complexe peut être engendré par des systèmes d'équations très simples.

Cette nouvelle approche, un peu à l'image de la révolution quantique du début du siècle, envahit peu à peu l'ensemble de la science. Nous savons maintenant que le système solaire est imprédictible au delà de 100 millions d'années⁹. Le mouvement complexe du satellite de saturne, Hypérion, est chaotique, et ce, en raison de sa forme oblongue. Au sein des systèmes physiologiques, le chaos procurerait une flexibilité de réponse accrue à différentes situations¹⁰. Ainsi le rythme cardiaque normal serait chaotique ce qui permettrait au cœur de réagir efficacement à l'effort¹¹. Des modèles de réactions chimiques offrent des régimes chaotiques et l'une d'entre elles, la réaction de Belousov-Zhabotinsky¹², présente un attracteur étrange compatible avec le modèle théorique de Otto E. RöSSLer¹³. Enfin, bien que des phénomènes spatio-temporels soient le plus souvent impliqués dans la turbulence¹⁴, il serait possible de comprendre la turbulence par un modèle à peu de degrés de liberté¹⁵ contrairement au scénario proposé en 1948 par Landau qui en nécessitait un nombre infini. Dans le même esprit, E. N. Lorenz¹⁶ propose en 1963 un modèle simplifié d'une cellule de convection de Rayleigh-Bénard qui génère un attracteur étrange. En 1981, sur une cellule d'hélium liquide, l'équipe de A. Libchaber¹⁷ vérifie expérimentalement l'existence du scénario d'apparition du chaos proposé par P. Couillet et C. Tresser¹⁸ et, indépendamment, M. J. Feigenbaum¹⁹.

Un enjeu d'actualité est d'extraire une information plus fine sur les mécanismes qui engendrent le chaos afin de permettre une compréhension profonde de la physique en jeu. Dans cette optique le LESP²⁰ s'est attaché à l'étude des instabilités hydrodynamiques dites d'*oscillations de lentilles thermiques* ou de *cœur d'anneaux* qui sont liées à la présence d'un gradient thermique sous la surface libre d'un liquide. En parallèle de deux

⁹J. Laskar cité dans Chaos et Déterminisme, édité par A. D. Dalmedico, J. L. Chabert, K. Chemla, Points Seuil, Paris, 1992.

¹⁰R. M. May, Le chaos en biologie, in La science du désordre, La Recherche, 232, pp. 588-598, 1991.

¹¹A. L. Golberger, B. J. West, Annals of New York Academy of Sciences, 504, pp. 195- , 1987.

¹²J. C. Roux, H. Swinney, Topology of chaos in a Chemical reaction, in Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics, eds. C. Vidal, A. Pacault, Springer-Verlag, 1981.

¹³An equation for Continuous Chaos, Physics Letters, 57A (5), pp.397-398, 1976.

¹⁴P. Bergé, Y. Pomeau, M. Dubois-Gance, Des rythmes au chaos, Editions Odile Jacob, Paris, 1994.

¹⁵D. Ruelle, F. Takens, On the nature of Turbulence, Communications in Mathematical Physics, 20, pp. 167-192, 1971.

¹⁶Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the Atmospheric Sciences, 20, pp.130-141, 1963.

¹⁷A. Libchaber, J. Maurer, A Rayleigh-Bénard experiment : helium in a small box, Nonlinear Phenomena at Phases Transitions, édité par T. Riste, pp.259-286, 1982.

¹⁸P. Couillet, C. Tresser. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *Journal de Physique*, Colloque C5, supplément au $n^{\circ}8$ (39), pp. C5-25, 1978.

¹⁹M. J. Feigenbaum, Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformation, Journal of Statistical Physics, 19 (1), pp. 25-52, 1978.

²⁰Laboratoire d'Energétique des Systèmes et Procédés, UA CNRS 230, INSA, BP 08, 76131 Mont Saint-Aignan

expériences, notamment le *fil chaud*²¹ (gradient imposé par le fil) et la *lentille thermique*²² (gradient induit par un faisceau laser focalisé), le LESP s'est investi dans une approche plus théorique des systèmes non-linéaires qui doit permettre une étude approfondie des deux expériences précédentes et des retombées pratiques sur d'autres domaines d'application comme la combustion, les plasmas, les jets, l'optique non-linéaire, le diagnostic médical...

Au sein de cet ouvrage, deux aspects seront plus particulièrement traités : la caractérisation topologique des attracteurs étranges et leur reconstruction à partir d'une série expérimentale. Aussi est-ce tout naturellement que l'auteur propose deux parties :

Première Partie : Caractérisation topologique

- Chapitre 1 : Une introduction sur les propriétés topologiques des attracteurs est donnée à travers une application à la cascade de doublements de période.
- Chapitre 2 : La topologie des attracteurs présentés par le système de Rössler est utilisée pour une caractérisation fine des différents régimes en fonction d'un des paramètres de contrôle. Le rôle des orbites périodiques dans le développement de l'attracteur qui suit la cascade de Feigenbaum est mis en évidence.
- Chapitre 3 : L'application de la caractérisation topologique est étendue aux systèmes symétriques qui requièrent une procédure spécifique : le système étudié est celui de E. N. Lorenz.

Deuxième partie : Reconstruction des attracteurs étranges

- Chapitre 4 : Le principe des techniques de reconstruction est donné. Une étude sur l'équivalence entre les attracteurs originaux et leur reconstruction est effectuée sur quelques systèmes connus.
- Chapitre 5 : Une brève revue des différentes méthodes de reconstruction est suivie par la présentation de la méthode développée au LESP. La reconstruction de quelques systèmes avec cette méthode est étudiée.
- Chapitre 6 : L'influence du bruit sur la méthode de reconstruction utilisée est étudiée. Quelques comportements caractéristiques sont mis en évidence et l'utilisation d'une méthode de lissage est testée : les modifications que peut entraîner une telle solution sont répertoriées. La reconstruction d'une série numérique bruitée est alors effectuée.

²¹E. Ringuet, C. Rozé, G. Gouesbet, Experimental observation of type-II intermittency in a hydrodynamic system, *Physical Review E*, 47 (2), pp. 1405-1407, 1993.

²²S. Meunier-Guttin-Cluzel, B. Maheu, G. Gouesbet, Combined approaches and characterizations of experimental chaotic attractors in thermal lensing, *Physica D*, 58, pp. 423-440, 1992.

Première partie

**Caractérisation topologique des
attracteurs étranges**

Chapitre 1

La cascade de doublements de période

1.1 Introduction

La théorie de la dynamique des systèmes regroupe, en autres, l'étude qualitative des équations différentielles érigées en vue de la modélisation et de la compréhension des comportements des systèmes physiques de notre environnement comme l'évolution des planètes, les vibrations d'une corde, la prédiction du temps. Les premiers travaux dans ce domaine virent le jour il y a deux siècles : Newton, Euler, Hamilton, Maxwell ont donné de nombreuses formulations aux "lois de l'Univers". Des mouvements, tels que celui d'un pendule, sont réguliers et faciles à décrire tandis que d'autres, comme l'écoulement turbulent d'un fluide, sont irréguliers et défient apparemment toutes les lois.

Les fondateurs de l'analyse "qualitative" des systèmes différentiels sont Henri Poincaré (1854-1912) et Alexandre Lyapunov (1854-1918). Il faut aussi citer Ivar Bendixon (1861-1936) et George Birkhoff (1884-1944). C'est essentiellement la mécanique céleste qui motive ces premiers travaux et cela se traduit à la fois dans le cadre général (mécanique hamiltonienne), dans les hypothèses (tout est à coefficients analytiques) et dans les méthodes (séries de perturbations). Henri Poincaré introduit l'approche "globale" des systèmes différentiels, dégage les éléments essentiels des portraits de phases dans le plan (points singuliers, orbites périodiques, cycles limites, séparatrices, ...) et attire l'attention sur la nécessité de considérer en priorité les propriétés génériques (persistantes sous des petites perturbations).

Ainsi Henri Poincaré fut le premier à apprécier la véritable source du problème : la difficulté rencontrée lors de l'étude de systèmes dynamiques non-linéaires ne provient pas des lois mais plutôt de la détermination des conditions initiales. Au début de ce siècle, dans son essai "Sciences et Méthodes" (1908), il écrit :

Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à un instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.

La découverte de la sensibilité aux conditions initiales par Henri Poincaré a permis la compréhension de mécanismes dynamiques complexes qui sont maintenant regroupés sous la terminologie du "chaos".

Un système dynamique est traditionnellement défini par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (1.1)$$

Une solution d'un tel système est déterminée par l'extraction d'une fonction qui satisfait ce système d'équations. Une trajectoire (ou courbe intégrale) est alors obtenue à partir de conditions initiales particulières. Lorsque le système est suffisamment dissipatif, les solutions de ce champ de vecteurs \mathbf{f} peuvent être modélisées sur une sorte de ruban appelé *variété* de l'espace des phases. Pour chaque point x de cette variété V , nous pouvons définir une courbe intégrale de \mathbf{f} notée $\phi_t(x)$ telle que $\phi_0(x) = x$. L'application ϕ_t est appelé *flot intégral*.

Par exemple, si nous voulons prédire la position d'une planète dans une dizaine d'années, il nous "suffit" de mesurer sa position et sa vitesse, d'écrire le système d'équations différentielles qui régissent son mouvement et de l'intégrer à partir des conditions initiales mesurées.

Avant la découverte de Poincaré, une telle démarche était considérée comme suffisante. La connaissance d'un système d'équations différentielles (déterministe) et des conditions initiales semblait permettre toute prédiction. En d'autres termes, un système dynamique non linéaire avait toujours une solution ...

Par sa découverte du comportement chaotique (la sensibilité aux conditions initiales) dans le problème à trois corps, Henri Poincaré remet en question cette démarche. Il montra qu'un tel système peut produire des comportements à long terme très différents bien que leurs conditions initiales soient infiniment proches! Poincaré réalisa les implications de cette "simple" découverte et redéfinit immédiatement la notion de "solutions" d'une équation différentielle.

Henri Poincaré était moins intéressé par les orbites particulières que par l'ensemble des trajectoires possibles. Cependant une complète connaissance des solutions de manière qualitative est souvent d'accès difficile car elle requiert une vision globale de la dynamique. Trouver des solutions particulières était l'approche traditionnelle pour résoudre les systèmes d'équations différentielles. Mais Henri Poincaré avait compris que la notion de récurrence était un concept clé dans l'extraction des solutions qualitatives. Afin de comprendre les propriétés de récurrence d'un système dynamique, nous devons savoir quelles régions de l'espace des phases sont visitées et si elles le sont fréquemment. Pour cela il introduisit la notion d'hypersurfaces transverses; il s'agit d'un arc courbe qui n'est tangent en aucun point à une courbe intégrale. Ainsi, une courbe intégrale qui rencontre un arc transverse le traverse nécessairement. Dans une analogie topographique, quand les lignes de niveaux jouent le rôle de courbes intégrales, les lignes de pente constituent des exemples d'arc transverse. En considérant la succession des intersections d'une trajectoire avec un arc transverse, H. Poincaré ramène l'étude de la forme d'une courbe plongée dans un espace tridimensionnel à l'étude de la succession des points dans un plan : l'ensemble des intersections de la trajectoire avec ce plan définit ce nous appelons une *section de Poincaré*.

Nous savons aujourd'hui que certains systèmes dissipatifs offrent la particularité de présenter un comportement asymptotique relativement complexe qui est borné dans l'espace des phases : celui-ci s'inscrit alors sur un *attracteur* qu'il suffit d'étudier pour obtenir une vision globale des propriétés du système. Un attracteur peut se modéliser en terme de variétés branchées, c'est à dire sous la forme d'un ruban sans épaisseur étiré et replié sur lui-même sur lequel les trajectoires se développent. De tels objets sont sensibles aux conditions initiales : on dit qu'ils sont *chaotiques*. Lorsqu'ils possèdent des propriétés fractales : ils sont alors qualifiés d'*étranges*.

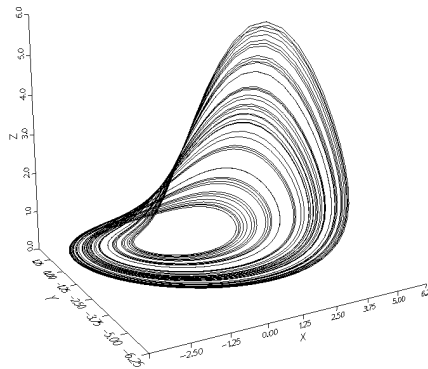
L'exemple le plus simple est celui du *ruban simplement plié* de Otto E. RöSSLER [3] (fig. 1.1). Ce système est gouverné par l'ensemble d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1.2)$$

Son comportement dynamique dépend de ses trois paramètres de contrôle a , b et c . Une étude complète suivant une ligne de l'espace des paramètres sera effectuée au Chapitre 2.

Suivant H. Poincaré, l'étude des propriétés de récurrence d'un tel système se fait par l'intermédiaire d'une section de Poincaré qui est définie perpendiculairement au flot (orthogonale au ruban, figure 1.1). La notion de récurrence est particulièrement présente dans le cas d'orbites périodiques et c'est d'une manière toute naturelle que l'étude des systèmes dynamiques se développe autour d'elles. Henri Poincaré, qui en avait perçu toute l'importance, écrit dans son essai "Sciences et Méthodes" :

Etant données des équations ... et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que

FIG. 1.1 – Ruban de O. E. Rössler $(a, b, c)=(0.398, 2, 4)$.

la différence entre ces deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

Il s'avère qu'un attracteur étrange contient une infinité d'orbites périodiques [2]. Celles-ci sont toutes instables, c'est à dire que même si nous connaissons, de manière aussi précise que possible, les conditions initiales générant une orbite périodique, la trajectoire, obtenue par intégration du système d'équations différentielles à partir de ces conditions initiales, ne restera pas indéfiniment sur cette solution périodique. Cette population d'orbites périodiques est perçue comme le squelette de l'attracteur. Une trajectoire chaotique s'enchevêtre donc autour des orbites périodiques sans jamais les atteindre. Par conséquent les propriétés dynamiques des orbites périodiques reflètent le comportement dynamique de toute trajectoire appartenant à l'attracteur.

De plus, la naissance d'un attracteur peut être comprise par l'étude des points fixes du système (points de vitesse nulle) et de leur influence sur les orbites périodiques stables dont ils sont issus. En effet le comportement des systèmes dynamiques dépend des paramètres de contrôle dont certains reflètent le degré d'instabilités de l'ensemble attracteur. Dans les systèmes hydrodynamiques ce degré est souvent caractérisé par le nombre adimensionnel de Rayleigh R qui présente une valeur critique à l'apparition des instabilités. De ce fait sous une augmentation de R un cycle limite (un régime laminaire) se déstabilise jusqu'à l'apparition d'un attracteur chaotique (un régime turbulent). La déstabilisation peut se produire de différentes manières. Ainsi plusieurs "routes vers le chaos" peuvent être définies : celle du doublement de période va être largement étudiée dans ce chapitre. A partir de cet exemple, nous introduirons les concepts de la caractérisation topologique qui seront largement utilisés au cours de cet ouvrage.

1.2 Topologie du doublement de période

L'une des routes vers le chaos parmi les plus populaires est le scénario du doublement de période. Elle se traduit par un cycle limite de période 1 qui perd sa stabilité au profit d'un nouveau cycle limite de période 2, qui va la transmettre à un cycle limite de période 4, et ainsi de suite. Il a été montré ([4],[5]) qu'une large classe de relations de récurrence répond à ce scénario. Cette classe d'équivalence est définie par l'ensemble des fonctions pourvues d'un unique maximum différentiable que l'on notera C . Le mécanisme du doublement de période va être décortiqué par une analyse linéaire de stabilité. La topologie de ce processus sera alors étudiée.

1.2.1 Analyse de Floquet

Avant d'étudier en détail la déstabilisation d'un cycle limite au cours du doublement de période, quelques concepts vont être rappelés.

La notion de stabilité peut s'introduire très facilement par un exemple très pratique. Il existe deux types de configurations d'équilibres possibles entre une demi-noix de coco et une bille. La première est de placer la bille au fond de la demi-noix de coco (fig. 1.2.a). Cet équilibre est très facile à obtenir car quelle que soit la position de la bille à l'intérieur de l'hémisphère, celle-ci va descendre tout naturellement au centre et n'en bougera plus.

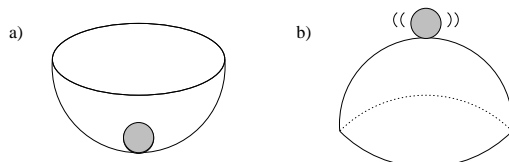


FIG. 1.2 – a) équilibre stable b) équilibre instable

La seconde est de poser la bille sur la demi-noix de coco retournée (fig. 1.2.b). Il y a très peu de chances pour que la bille reste en équilibre. Pourtant, il existe une position où l'équilibre est réalisé. La principale différence avec l'équilibre précédent réside dans la précarité de cette position d'équilibre que la moindre perturbation suffit à rompre. Des objets mathématiques tels que les suites peuvent présenter des solutions d'équilibre stables et instables. Leurs solutions d'équilibre sont appelées points fixes et correspondent à des valeurs telles que $x_{n+1} = x_n$. Par exemple, la suite connue sous le nom de parabole logistique définie par :

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad 0 \leq x_n \leq 1 \quad (1.3)$$

possède deux points fixes vérifiant l'équation

$$x_F = \mu x_F(1 - x_F) \quad (1.4)$$

et de valeurs respectives :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{\mu - 1}{\mu} \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour $\mu < 1$, la valeur x_2 n'est pas une solution appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ constituant le bassin d'attraction. L'étude de la convergence autour des points fixes se réalise par l'intermédiaire de la dérivée $f'(x)$:

$$f'(x) = \mu(1 - 2x) \quad (1.6)$$

Si sa valeur absolue est inférieure à 1, la suite converge vers le point fixe étudié, sinon elle diverge. Pour la seule solution présente pour $\mu < 1$, la dérivée en x_1 est égale à μ et est inférieure à 1. Le point fixe $x_1 = 0$ constitue donc une limite asymptotique pour la suite x_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (1.7)$$

Le point fixe x_1 constitue alors un point d'équilibre stable de la suite. Lorsque μ est supérieur à 1, la dérivée en $x_1 = 0$ devient supérieure à 1 et le point fixe perd sa stabilité. Le deuxième point fixe apparaît et sa dérivée $f'(x_2)$ est égale à $(2 - \mu)$. Elle est inférieure à 1 ($\mu > 1$) et la suite converge vers ce second point fixe. Sa limite asymptotique est alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\mu - 1}{\mu} \quad 3 > \mu > 1 \quad (1.8)$$

A la valeur $\mu=1$, il se produit une bifurcation. C'est à dire qu'un point fixe perd sa stabilité au profit d'un autre. A une bifurcation peut être associée la création d'un nouveau point fixe (comme dans le cas précédent).

Dans le cas d'un système tri-dimensionnel, une limite asymptotique pourra être associée à un cycle limite semblable à un simple lacet fermé.

L'apparition du chaos se fait principalement par la déstabilisation d'un tel cycle limite à la configuration très simple. Un cycle limite est une solution périodique stable invariante sous l'action du flot ϕ_t qui le gouverne. En termes mathématiques, cela s'exprime par :

$$\vec{X}_T = \phi_T(\vec{X}_0) = \vec{X}_0 \quad (1.9)$$

où

\vec{X}_T définit le point du cycle limite au temps $t = T$

T est la période temporelle du cycle limite

ϕ_t désigne le flot associé au système d'équations différentielles ordinaires

La stabilité d'une telle solution s'étudie par l'intermédiaire d'une section de Poincaré définie à l'aide d'un plan de Poincaré perpendiculaire au cycle limite de la manière représentée Figure 1.3.

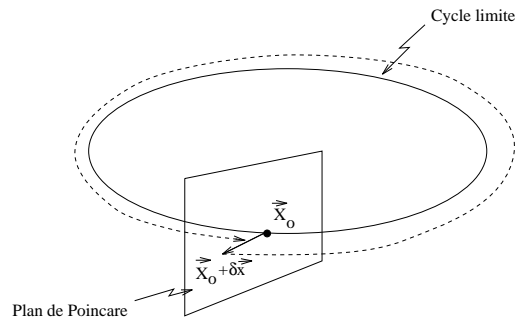


FIG. 1.3 – Cycle limite accompagné d'une section de Poincaré

Cette analyse s'effectue par l'application d'une petite perturbation $\vec{\delta x}$ au point d'intersection \vec{X}_0 entre le cycle limite et le plan de Poincaré choisi. Ainsi la condition initiale $(\vec{X}_0 + \vec{\delta x})$ est transformée au bout d'une période T de la manière suivante :

$$\vec{X}_T = F(\vec{X}_0 + \vec{\delta x}) \quad (1.10)$$

Etant donné que nous souhaitons exprimer l'itéré \vec{X}_T sous une forme linéaire, l'étude se situe au voisinage du cycle limite, et nous écrivons :

$$\vec{X}_T \approx \vec{X}_0 + M\vec{\delta x} \quad (1.11)$$

où M est une matrice carrée, dite de Floquet, de dimension égale à celle de l'espace des phases. On remarque tout d'abord que si la perturbation $\vec{\delta x}$ est effectuée le long de la trajectoire, cette dernière reste sur le cycle limite lui-même et se retrouve, inchangée au bout d'une période T . En d'autres termes, la matrice de Floquet possède une valeur propre λ égale à 1. Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ définit le vecteur tangent à la direction du flot au point \vec{X}_0 . En fait, ce sont des perturbations dans des directions perpendiculaires au cycle limite qui renseigneront sur la stabilité de celui-ci. La condition de stabilité d'une telle solution périodique repose sur la réduction de la perturbation $\vec{\delta x}$ sous l'action du flot ϕ_t durant une période T . Dans le cas du cycle limite, toutes les valeurs propres λ_i de la matrice M (exceptée la valeur propre tangente $\lambda_1 = 1$) sont de module inférieur à 1 et donc situées à l'intérieur du cercle unité du plan complexe. De ce point de vue, la déstabilisation d'un cycle limite sous l'évolution d'un paramètre de contrôle se réalise par l'intersection d'une valeur propre avec le cercle unité : la perturbation $\vec{\delta x}$ alors associée à cette direction propre est ensuite amplifiée, écartant de plus en plus la trajectoire du cycle limite (fig. 1.4).

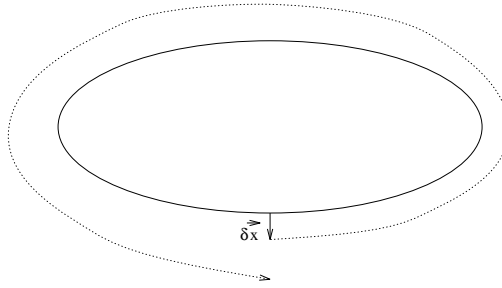


FIG. 1.4 – Déstabilisation d'un cycle limite : Evolution d'une petite perturbation en son voisinage

Cette perte de stabilité de la solution périodique traduit un changement de comportement dynamique à une valeur critique du paramètre de contrôle : il y a bifurcation. Il en existe plusieurs par lesquelles des cycles limites se déstabilisent (fig. 1.5) : elles se caractérisent par

- deux valeurs propres complexes conjuguées ($\alpha \pm i\beta$) qui traversent simultanément le cercle unité : la bifurcation est dite de Hopf. Les valeurs propres complexes conjuguées génèrent une rotation autour du cycle limite initial. Une deuxième fréquence caractéristique s'ajoute donc à celle qui est associée au cycle limite. Deux variantes de cette bifurcation existent : elles donnent respectivement naissance au régime quasi-périodique et à l'intermittence de type -II.
- une valeur propre qui traverse le cercle unité par la valeur (+1) : la bifurcation est appelée nœud-col. Le cycle limite ne devient pas seulement instable, il disparaît purement et simplement. Dans la région de l'espace des paramètres juste au delà du seuil de bifurcation, le système développe alors un régime particulier, appelé intermittence de type-I.
- une valeur propre qui traverse le cercle unité par la valeur (-1) : deux schémas possibles peuvent décrire cette déstabilisation du cycle limite. Soit une nouvelle solution périodique stable de période deux fois plus longue se substitue au cycle limite devenu instable (doublement de période), soit deux orbites périodiques instables disparaissent au niveau du cycle limite, tuant sa stabilité (intermittence de type-III).

Lorsque deux types de bifurcation correspondent à une même situation du point de vue des valeurs propres, les bifurcations sont dites respectivement sur-critique et sous-critique. A chaque solution est associé un comportement caractéristique du terme non-linéaire. Ainsi l'équation différentielle de la forme suivante donne naissance à une bifurcation sur-critique [6] :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (1.12)$$

Le terme non-linéaire en x^3 a un effet opposé à celui de l'instabilité engendrée par le terme d'ordre moins élevé. Pour x très petit, seul le terme linéaire μx importe ; la solution

$$x(t) = e^{\mu t} \quad (1.13)$$

obtenue dans ces conditions est instable et diverge à l'infini dès que μ est positif. Mais cette divergence exponentielle ne se produit pas car elle est "tuée" par le terme non linéaire $-x^3$ qui, très vite, ne peut plus être négligé.

Rien n'empêche, cependant, que le terme non linéaire d'ordre le plus bas ait, lui aussi, un caractère déstabilisant pour la solution. Dans ce cas la bifurcation sera dite sous-critique.

Nous nous intéresserons ici à la cascade de doublements de période.

1.2.2 Caractérisation topologique

Dans la section précédente, nous avons vu toute l'utilité d'une étude locale des propriétés de stabilité à l'aide des multiplicateurs λ_i de Floquet. Dans ce qui suit nous ignorerons le multiplicateur trivial $\lambda_1 = 1$.

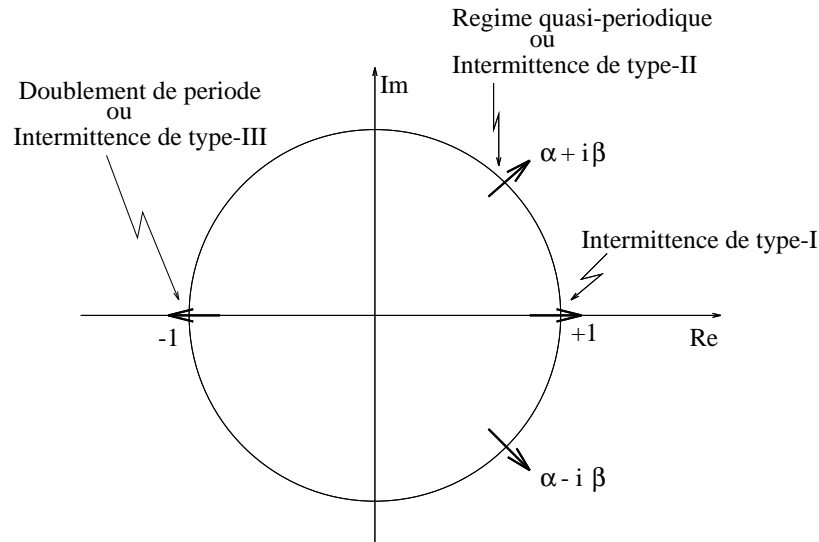


FIG. 1.5 – Les principales routes vers le chaos

A partir de considérations sur les autres multiplicateurs $\lambda_i (i \in 2, \dots, n)$ de l'espace R^n , différents types de stabilité des orbites périodiques peuvent être définis :

- elliptique stable ($|\lambda_i| < 1, \forall i \in [2, \dots, n]$)
- elliptique instable ($|\lambda_i| > 1, \forall i \in [2, \dots, n]$)
- elliptique neutre ($|\lambda_i| = 1, \forall i \in [2, \dots, n]$)

Si l'ensemble des multiplicateurs est tel que $|\lambda_i| \neq 1, \forall i \in [2, \dots, n]$, les orbites sont dites *hyperboliques*. Les orbites périodiques d'un attracteur étrange sont hyperboliques et telles que certains multiplicateurs soient stables ($|\lambda| < 1$) et d'autres instables ($|\lambda| > 1$) : elles sont dites non-stables. Par abus de langage, elles sont souvent qualifiées d'orbites périodiques instables (ce que nous ne manquerons pas de faire). Des vecteurs propres peuvent être associés aux multiplicateurs de Floquet. L'ensemble de ces vecteurs propres définit un espace tangent dont une image succincte peut être donnée. Appliquer une petite perturbation à un cycle limite et en suivre l'évolution revient à définir un ruban dans le voisinage de l'orbite périodique : d'une certaine manière ce ruban correspond à l'espace tangent. Il va nous permettre de caractériser la topologie des orbites périodiques.

Les orbites périodiques d'un système d'équations différentielles ordinaires de R^3 ont des propriétés similaires aux nœuds : ils sont tous les deux des sous-ensembles de R^3 homéomorphiques au cercle S^1 , c'est à dire qu'il existe entre un nœud, ou une orbite périodique, et un cercle une application bijective continue. Un nœud mathématique est une courbe lisse fermée qui est plongée dans un espace tridimensionnel. Interpréter une projection sur un plan d'un nœud n'est pas toujours aisé. Une telle représentation n'est pas unique et montrer l'équivalence de deux représentations différentes d'un même nœud est souvent un problème ardu (Figure 1.6). Deux nœuds sont dits topologiquement équivalents s'il existe une transformation continue (une isotopie) qui permet de passer de l'un à l'autre.

Une orbite périodique d'un flot tridimensionnel, une courbe fermée sans self-intersection, est donc un nœud ; celui-ci est orienté dans la mesure où, en raison du caractère dissipatif des flots étudiés, le temps ne peut être inversé sans divergence à l'infini de la trajectoire. Le squelette d'orbites périodiques peut donc être vu comme un enchevêtrement de nœuds : il forme donc un lien (objet formé de plusieurs nœuds). Décrire la topologie de ce lien revient à caractériser la topologie de l'ensemble attracteur du système dynamique. Aussi la classification des nœuds est-elle un problème fondamental pour la dynamique des systèmes car à chaque nœud correspond une propriété topologique différente représentative d'un comportement dynamique spécifique. Cette caractérisation



FIG. 1.6 – Différentes projections équivalentes du nœud "trèfle" (d'après N. B. Tufflaro)

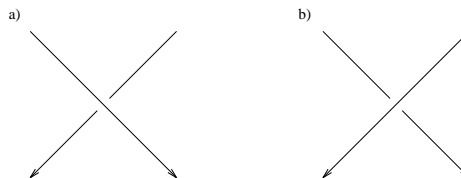
est généralement conservée lorsqu'une variation est appliquée à l'un des paramètres de contrôle du système. Sous cette variation, la transformation imposée au portrait de phase du système est une isotopie (déformation continue de ce portrait). Par conséquent les orbites périodiques qui y sont plongées sont, elles aussi, transformées sous une isotopie. De plus lors d'une telle déformation, aucune orbite périodique ne peut se croiser avec elle-même ou une autre : une telle intersection impliquerait deux évolutions différentes à partir d'un même état du système, en violation avec le principe du déterminisme : l'arrangement relatif des orbites périodiques est donc invariant sous une isotopie. Ceci est vrai tant que n'intervient pas une bifurcation entre les orbites considérées. Par ailleurs, une rupture de symétrie peut interdire une isotopie [7]. La caractérisation des orbites périodiques (nœuds) peut donc se faire par l'intermédiaire d'invariants topologiques définis par des quantités scalaires conservées sous une isotopie. Ceux-ci doivent rendre compte des arrangements relatifs entre les différentes orbites périodiques. L'un des invariants les plus simples qui permet une telle caractérisation est le nombre de liaisons (linking number). Il en existe deux types :

- le nombre de liaisons d'une orbite avec elle-même que nous appellerons ici le nombre de self-liaisons (self-linking number),
- le nombre de liaisons entre deux orbites appelé ici le nombre de liaisons (linking number).

Le nombre de liaisons est défini sur un lien entre deux nœuds N_1 et N_2 . Il peut être spécifié de plusieurs manières, avec des degrés variés de sophistication mathématique. Une définition formelle est donnée par l'intégrale de Gauss [8] :

$$L(N_1, N_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_{N_1} \int_{N_2} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_1 \wedge d\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} \quad (1.14)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme Euclidienne et $r_{1,2}$ deux vecteurs qui définissent respectivement les nœuds dans l'espace des phases. Une manière plus simple d'obtenir ce résultat consiste à réaliser une projection régulière du lien (c'est à dire dresser un graphe tel qu'il ne présente pas plus de deux courbes qui se coupent à la fois) et de compter les intersections entre les deux nœuds N_1 et N_2 [7]. Pour cela une orientation des intersections doit être réalisée. Un nombre $\sigma_{ij}(p)$ égal à plus ou moins 1 est donc défini (fig. 1.7) où i, j sont des indices caractérisant chacun de ces deux nœuds et p désigne un croisement. Cette convention d'intersection est celle introduite par P. Melvin *et al* [10].

FIG. 1.7 – Convention d'intersections de deux nœuds : a) intersection négative $\sigma=-1$ b) intersection positive $\sigma=+1$

Le nombre de liaisons est alors égal à la demi-somme des intersections orientées, soit :

$$L(N_i, N_j) = \frac{1}{2} \sum_p \sigma_{ij}(p) \quad (i \neq j) \quad (1.15)$$

Ainsi seules les intersections entre les deux orbites périodiques sont retenues : les intersections d'une orbite avec elle-même sont ignorées. Evidemment le nombre de liaisons entre les nœuds N_1 et N_2 est le même que celui entre les nœuds N_2 et N_1 : $L(N_1, N_2) = L(N_2, N_1)$. Ce nombre étant invariant sous une isotopie, il est indépendant de l'orientation de la projection choisie [7]. Ce nombre de liaisons sera conservé tant qu'une bifurcation n'impliquera pas les deux nœuds (orbites périodiques). Toute bifurcation impliquant un seul de ces nœuds, dans la mesure où elle ne le détruit pas, n'affectera pas ce nombre [7]. Deux exemples de lien sont donnés figure 1.8 .

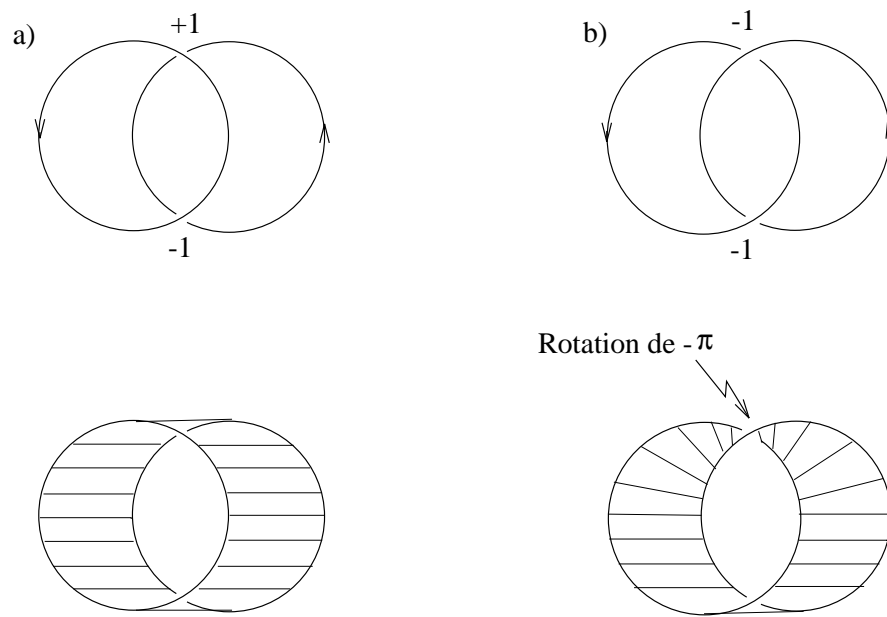


FIG. 1.8 – a) lien sans liaison : $L(N_1, N_2) = 0$ b) lien avec liaison : $L(N_1, N_2) = -1$

Des figures précédentes, il est aisé de comprendre quels sont les aspects topologiques caractérisés par les nombres de liaisons. Lorsqu'ils ne sont pas liés, les deux nœuds représentés (les plus simples qui puissent exister, c'est à dire deux cercles S^1) peuvent s'inscrire sur une surface dépourvue de toute complexité (un simple ruban). Au contraire, une liaison entre ces deux nœuds (fig. 1.8.b) leur impose d'être inscrits sur un ruban de Möbius (ruban pourvu d'une rotation d'un demi-tour). Nous verrons qu'une simple rotation comme celle-ci implique de profondes conséquences sur les propriétés dynamiques d'un système.

Le second type de liaisons est associé à la notion de self-liaison. Ce concept n'est plus associé à la topologie d'un lien (assemblage de plusieurs nœuds) mais à celle de l'espace tangent d'un nœud qui est une approximation linéaire de la variété au voisinage du nœud. Le nombre de self-liaisons d'une orbite périodique (un nœud) est relié au nombre de liaisons entre cette orbite et un fin ruban qui caractérise son espace tangent : ce dernier se développe dans un voisinage suffisamment restreint de l'orbite pour permettre une linéarisation du flot. Une analyse "à la Floquet" est alors possible. Soit un vecteur directeur unitaire $\delta\vec{x}_0$ de l'espace tangent perpendiculaire au nœud, et son évolution temporelle $\delta\vec{x}_t$ que l'on gardera de norme constante. Le nombre de self-liaisons du nœud est égal à son nombre de liaisons avec l'évolution $\delta\vec{x}_t$; $0 \leq t < 2T_0$ pour une orbite de période T_0 [11]. L'évolution de l'espace tangent est suivie sur une période double de celle de l'orbite de manière à ce que le nombre de self-liaisons soit égal au nombre de demi-tours de l'espace tangent autour de l'orbite considérée. Ainsi, il suffit de suivre l'évolution d'une perturbation au voisinage de l'orbite périodique et de compter les intersections sur une projection suivant la convention choisie précédemment (fig. 1.8). Comme précédemment,

seules les intersections mettant en jeu l'orbite périodique et l'évolution du vecteur tangent $\delta\vec{x}_t$ sont prises en compte. A ce nombre de self-liaisons est associé un nombre de torsions n_τ de l'espace tangent autour de l'orbite périodique : il est défini comme étant égal au nombre de self-liaisons [11]. Il caractérise le nombre de demi-tours que subit l'espace tangent autour de l'orbite périodique (fig. 1.9). Une orbite N_1 de période T affectée d'un nombre de self-liaisons $L(N_1, N_1)$ égal à n_τ sera inscrit sur un espace tangent subissant une torsion de $n_\tau\pi$ durant la période T . Ce nombre N_τ est signé suivant la convention choisie. Ainsi, dans l'exemple de la figure 1.9, le nombre de self-liaisons $L(N_1, N_1)$ est égal à -2 ; la rotation de l'espace tangent sur lui-même est donc égal à -2π .

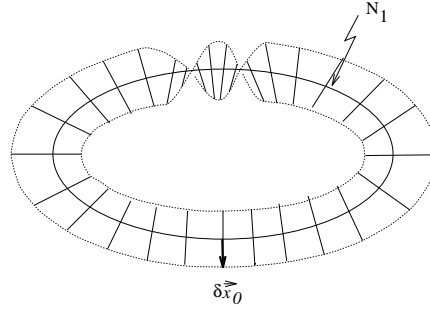


FIG. 1.9 – Rotation de l'espace tangent autour d'une orbite périodique de -2π .

D'une certaine manière l'espace tangent définit un ruban (délimité par les pointillés sur la figure 1.9) dont le nombre de torsions est extrait directement comme étant la demi-somme des intersections de ses lisières avec l'orbite. Nous pouvons déduire du nombre de self-liaisons (ou du nombre de torsions) une caractéristique importante d'une orbite périodique : sa parité. Elle est définie comme suit :

- **parité paire** si $L(N_1, N_1)$ est un nombre entier pair
- **parité impaire** si $L(N_1, N_1)$ est un nombre entier impair
- **parité fractionnelle** si $L(N_1, N_1)$ est un nombre quelconque

Ces considérations topologiques permettent une appréhension approfondie des orbites périodiques et des relations pouvant apparaître entre elles. En particulier, le mécanisme du doublement de période va pouvoir être étudié en termes de rotation de l'espace tangent du cycle limite original.

1.2.3 Mécanisme du doublement de période

Le système de Rössler présente un doublement de période sur la ligne de l'espace des paramètres définie par $\mathbf{L}(a, b, c) = (\text{variable}, 2, 4)$. L'étude de son comportement se réalise par une analyse de la stabilité de ses deux points fixes (points de vitesse nulle), F_+ et F_- , qui sont définis par les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x_{\pm} = \frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2} \\ y_{\pm} = -\frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2a} \\ z_{\pm} = \frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2a} \end{cases} \quad (1.16)$$

Leur stabilité est déterminée par les valeurs propres du jacobien du système de Rössler. La matrice jacobienne du système (1.2) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Les valeurs propres de cette matrice aux points F_- et F_+ sont obtenues par résolution du polynôme suivant :

$$-\lambda^3 + (a + x - c)\lambda^2 + (ac - ax - 1 - z)\lambda + x - c + az = 0 \tag{1.18}$$

A l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous trouvons qu'elles sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho_- + i\omega_- \\ \rho_- - i\omega_- \\ -\lambda_- \end{cases} \tag{1.19}$$

en F_- et

$$\begin{cases} -\rho_+ - i\omega_+ \\ -\rho_+ + i\omega_+ \\ \lambda_+ \end{cases} \tag{1.20}$$

en F_+ .

Le point F_- est situé au centre de l'attracteur représenté figure 1.1. C'est lui qui va piloter l'évolution de l'attracteur.

Pour de faibles valeurs de a ($a < 0.12496$), le comportement asymptotique du système de Rössler se résume à un point fixe stable (fig. 1.10.a) autour duquel spiralent les transitoires (trajectoires dans l'espace des phases qui conduisent à l'attracteur). On a alors ($\rho_- < 0, w_- \approx 1, \lambda_- > 0$). Augmentant le paramètre a , ρ_- s'annule en $a = 0.12496$ puis devient positif. Le point fixe F_- perd sa stabilité. w_- est alors peu différent de 1. C'est une bifurcation de Hopf, un cycle limite est né (fig. 1.10.b).

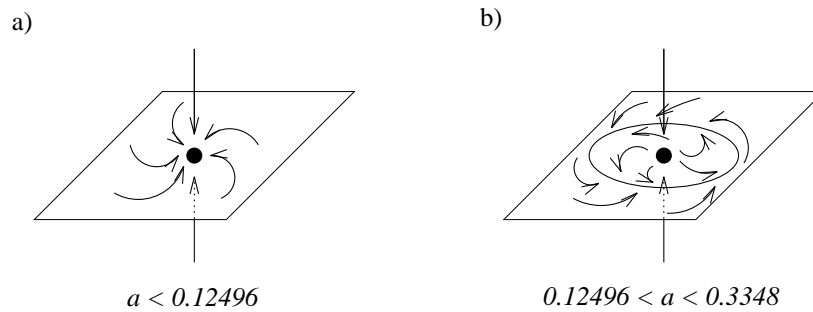


FIG. 1.10 – a) point fixe stable "spirale" b) cycle limite.

Au fur et à mesure que la vitesse angulaire w_- croît, l'espace tangent au point fixe s'enroule autour de celui-ci. Au delà de la bifurcation, un cycle limite émerge (fig. 1.11).

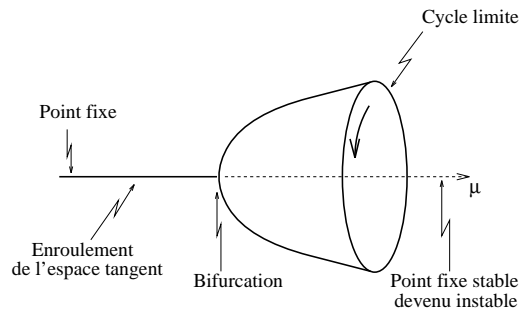


FIG. 1.11 – Diagramme de bifurcation de Hopf surcritique

Le jeune cycle limite est inscrit sur un espace tangent dépourvu de toute rotation (fig. 1.12). Suivant la définition de la parité donnée Section 1.2.2, le cycle limite est nanti d'un nombre de self-liaisons égal à 0 : il est donc pair.

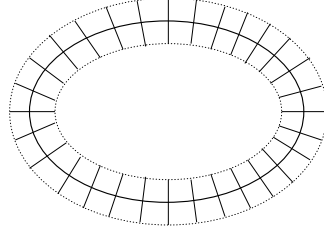


FIG. 1.12 – Espace tangent pair du cycle limite de période 1 : $L(N_1, N_1) = 0$

L'étude se poursuit maintenant dans un plan de Poincaré associé au jeune cycle limite. L'analyse linéaire se réalise maintenant suivant l'analyse de Floquet. Sous l'augmentation de a , l'espace tangent tend à se torsader autour du cycle limite. Considérant un cycle limite de configuration aussi simple que possible, étudions l'évolution d'une perturbation $\delta\vec{x}_0$ associée à la direction propre dont l'une des valeurs propres de la matrice de Floquet s'achemine vers la valeur (-1) (fig. 1.13).

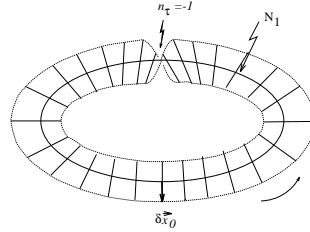


FIG. 1.13 – Espace tangent impair associé au cycle limite de période 1 : $L(N_1, N_1) = -1$.

La perturbation initiale est transformée sous l'action du flot ϕ_t durant une période T en une perturbation de norme inférieure et de direction opposée. L'espace tangent tend à se torsader autour du cycle limite. Ainsi, les transitoires accèdent au cycle limite en s'enroulant autour de celui-ci suivant sa stabilité (convergence plus ou moins rapide). Lorsque, sous une augmentation suffisante du paramètre de contrôle, la valeur propre accède à la valeur (-1), le cycle limite initial perd sa stabilité. Une perturbation $\delta\vec{x}_0$ se trouve muée en $\delta\vec{x}_T = -\delta\vec{x}_0$ sous l'action du flot ϕ_t durant une période T . Après une durée de $2T$, la perturbation se retrouve identique à la perturbation originale : $\delta\vec{x}_{2T} = \delta\vec{x}_0$ (fig. 1.14). Le nombre de self-liaisons est égal à -1 : le cycle limite est devenu impair et l'espace tangent a subi une rotation d'un demi-tour. Au cours de cette bifurcation, le comportement asymptotique du système de Rössler est passé d'un cycle limite de période temporelle T à un cycle limite de période $2T$: il y a eu doublement de période ; le cycle limite père (de période T) est devenu instable (fig. 1.14).

Après la bifurcation, le cycle limite fils de période 2 s'éloigne du cycle limite père (devenu instable). L'espace tangent étudié est maintenant celui du cycle fils (fig. 1.15).

L'ensemble des intersections sont regroupées au niveau des repliements. A chaque révolution de période T , l'espace tangent subit une rotation d'un demi-tour (ces rotations sont mises en évidence figure 1.15.b). Cependant, l'espace tangent décrit une boucle et il existe une isotopie entre un simple tour et une configuration en boucle (fig. 1.16) [7]. Aussi la configuration de l'espace tangent peut être ramenée à une configuration plus simple (fig. 1.15.c) où l'ensemble des rotations est évident : le nombre de torsion n_τ est égal à -4 .

Le cycle limite fils de période 2 est donc pair après sa naissance. L'apparition d'une valeur propre s'acheminant vers la valeur (-1) impose une nouvelle rotation d'un demi-tour à l'espace tangent. Si le cycle limite de période 1 voit son espace tangent devenir impair par l'adjonction d'une rotation d'un demi-tour négatif

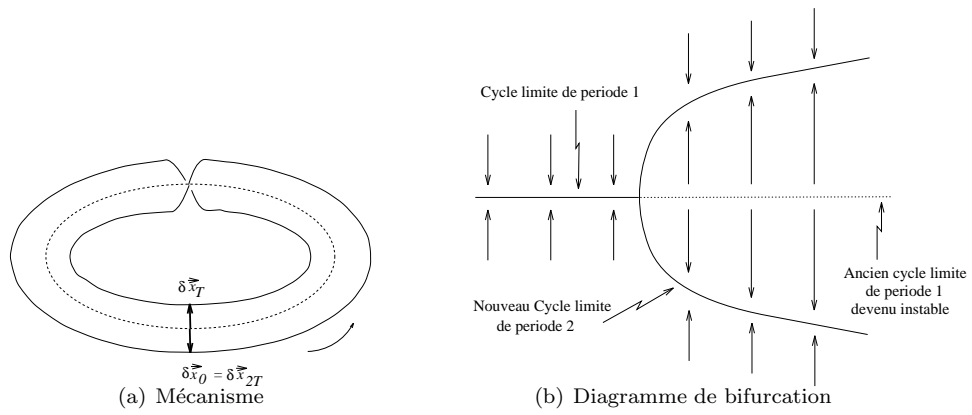


FIG. 1.14 – Doublément de période.

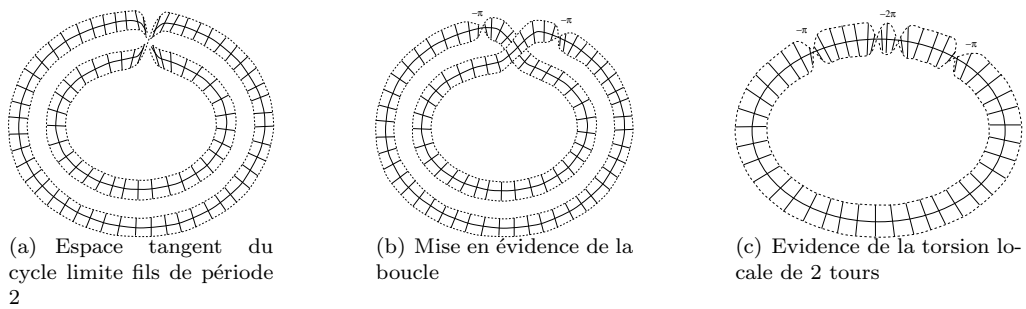


FIG. 1.15 – Rotation de l'espace tangent du cycle limite de période 2 : $L(N_2, N_2) = -4$.

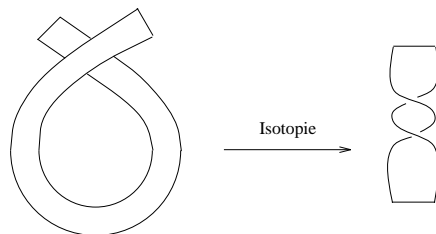


FIG. 1.16 – Isotopie entre une simple rotation d'un tour et une boucle

($n_\tau = -1$), il n'en est pas de même pour le cycle limite de période 2 : en effet, il récupère une parité impaire par l'adjonction d'une rotation d'un demi-tour positif ($n_\tau = +1$). La torsion de l'espace tangent est alors égale à $N_\tau = -4 + 1 = -3$ (fig. 1.17). Le nombre de liaisons est à nouveau impair. La parité du cycle limite est devenue impaire permettant l'apparition d'une nouvelle bifurcation.

Le processus se répète alors sur le cycle limite de période 4 engendré par la bifurcation. De cela, il se dégage que l'opération du doublement de période ne peut apparaître que sur des orbites périodiques de parité impaire [11].

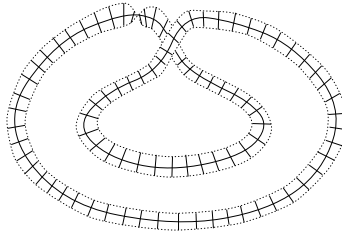


FIG. 1.17 – Espace tangent du cycle limite de période 2 juste avant la bifurcation vers le cycle limite de période 4 : sa parité est impaire.

Au doublement de période est associée une variation de la parité des orbites périodiques concernées. Lorsque l'espace tangent se dédouble, il est constitué de n_τ nombre de tours où n_τ est impair. Aussi, lorsqu'il se dédouble, le nombre de torsions est doublé et devient égal à $2n_\tau$ lié au dédoublement de l'espace tangent. A ce nombre de torsions est ajouté 2π par l'apparition d'une boucle supplémentaire qui engendre un tour supplémentaire. Ainsi un nouveau cycle limite est-il pair juste après la bifurcation. De manière à ce que les bifurcations de doublement de période apparaissent successivement, une parité impaire est récupérée sous une variation du paramètre de contrôle. Pour cela, l'espace tangent du cycle limite fils subit à nouveau une rotation de π . Au cours de la cascade de doublements de période, le passage d'une parité paire à une parité impaire du cycle limite se réalise par l'adjonction d'une rotation alternativement égale à $+\pi$ et $-\pi$. Cette particularité se retrouvera ultérieurement sur le mécanisme de réplication des séquences symboliques.

A chaque bifurcation une valeur critique du paramètre de contrôle peut être mise en évidence. Les valeurs successives a_1, a_2, a_3, \dots , associées respectivement aux bifurcations de la période 1 à 2, 2 à 4, 4 à 8, ..., vérifient la loi d'échelle suivante :

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i+1} - a_i} = 4.6692016091029\dots \quad (1.21)$$

où δ est une constante universelle mise en évidence par M. J. Feigenbaum [5]. La loi d'échelle précédente se traduit par des bifurcations successives qui apparaissent à des valeurs a_i de plus en plus proches les unes des autres. Il apparaît un point d'accumulation où deux bifurcations successives ne sont plus distinguables (fig. 1.18). A ce point, il existe une infinité d'orbites périodiques instables dont la période s'exprime sous la forme $2^n T_0$ où T_0 est la période du cycle limite générateur. Une trajectoire chaotique (apériodique) peut alors se développer sur ce squelette d'orbites périodiques.

1.3 Dynamique symbolique

Au delà du point d'accumulation $(a, b, c) = (0.386, 2, 4)$, l'infinité d'orbites de période $2^n T_0$ est instable et le comportement asymptotique de la trajectoire se développe sur un attracteur étrange. Cet ensemble limite se construit autour de la population d'orbites périodiques instables qui en constitue le squelette. La trajectoire est alors de période infinie. De manière pragmatique, nous disons qu'elle est apériodique. Lorsque le paramètre de contrôle augmente, cette trajectoire devient de plus en plus complexe. Nous introduirons une convention de codification des orbites périodiques : la dynamique symbolique.

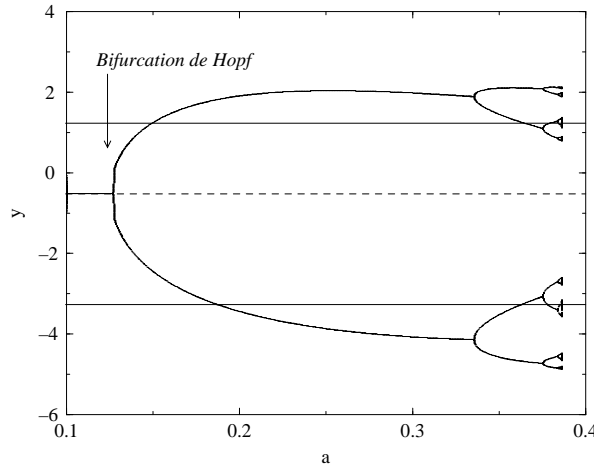


FIG. 1.18 – Diagramme de bifurcation de la cascade du doublement de période.

1.3.1 Notion

Au delà du point d'accumulation, la trajectoire se développe sur un attracteur étrange (fig. 1.19) qui se construit autour d'un point fixe (c'est à dire un point où le système est au repos).

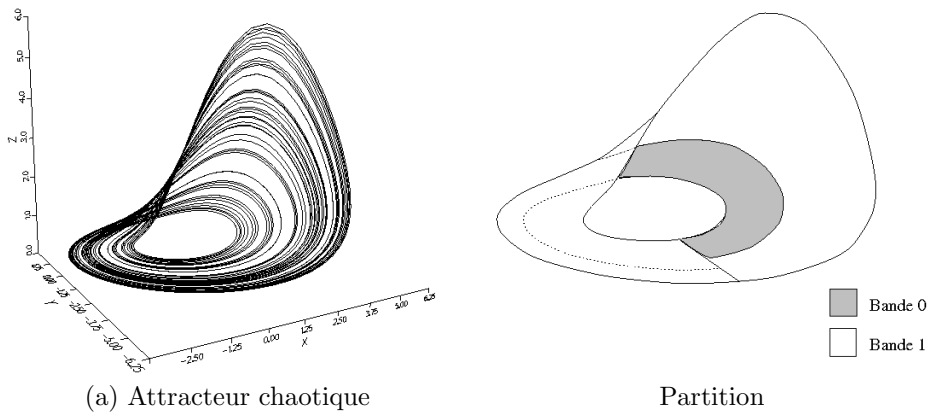


FIG. 1.19 – Comportement chaotique obtenu à partir du système de Rössler au delà du point d'accumulation : $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$ b) la partition qui lui est associée.

Cet attracteur peut être compris par l'intermédiaire d'un ruban étiré et replié sur lui-même. L'étirement garantit la sensibilité aux conditions initiales du comportement chaotique et le repliement est associé aux propriétés de mélange des trajectoires entre elles et au caractère borné de l'attracteur. Une étude topologique de ce ruban permet de dégager deux bandes aux caractéristiques bien distinctes. La première est une bande toute simple (de configuration analogue à une piste d'athlétisme; elle sera parfois appelée bande "stade") qui se développe autour du point fixe central F_- (fig. 1.20.a). La codification retenue pour cette bande sera la lettre "0". La seconde, à peine plus compliquée, est un ruban de Mœbius : elle s'enroule sur elle-même de manière à présenter une rotation d'un demi-tour (fig. 1.20.b). Cette seconde bande est codée par la lettre "1". Remarquons que cette distinction est basée sur la caractérisation topologique du ruban. En effet, ces deux bandes extraites du

ruban sont topologiquement différentes : le nombre de self-liaisons de ces bandes est respectivement de 0 et de -1. Nous avons vu qu'au nombre de self-liaisons pouvait être associée la parité. Ainsi, la lettre 0, dépourvue de toute torsion, est paire et la bande 1, nantie d'une torsion de $-\pi$, est impaire.

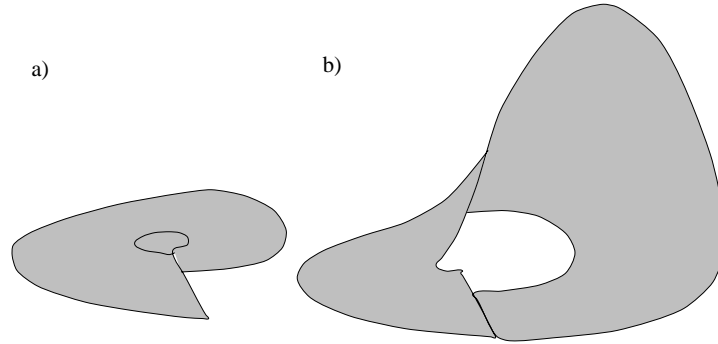


FIG. 1.20 – Partition du ruban simplement plié de Rössler : a) lettre 0 b) lettre 1

A l'aide de ces deux bandes nous avons réalisé une partition de l'attracteur. Ainsi, toute trajectoire chaotique (apériodique) s'inscrivant sur cet attracteur sera constituée d'une succession de révolutions sur la bande 0 et sur la bande 1. De cette manière, nous pouvons décrire n'importe quelle trajectoire comme étant une séquence de 0 et 1.

Nous dirons qu'une trajectoire est formée d'une séquence de lettres qui constituent un mot. Par exemple la séquence symbolique

$$s = 0101101110010101100\dots \quad (1.22)$$

décrit une trajectoire de l'attracteur. Les deux lettres 0 et 1 constituent l'alphabet de la dynamique symbolique, c'est à dire qu'à chaque séquence de 0 et de 1 il est associé une et une seule trajectoire. La connaissance de séquences symboliques est donc suffisante pour la caractérisation du comportement dynamique du système.

Une telle description de la dynamique permet la prédiction de la population d'orbites périodiques. En effet, une orbite périodique est constituée d'une séquence se répétant indéfiniment. Par exemple, une orbite de période 3 sera décrite par la séquence :

$$s = 100100100100\dots \quad (1.23)$$

La puissance de la dynamique symbolique réside dans le fait qu'il ne peut exister sur l'attracteur qu'une seule orbite périodique codée par la séquence (100). De ce fait, les différentes combinaisons possibles des deux lettres offrent toutes les orbites périodiques que peut, au plus, contenir un attracteur. A deux lettres, nous obtenons la population d'orbites périodiques répertoriée dans le tableau 1.1 :

Nous pouvons alors être sûr qu'un attracteur décrit par une dynamique symbolique à deux lettres aura, au plus, deux orbites de période 1 (c'est à dire effectuant une seule révolution sur l'attracteur avant de repasser par les mêmes points).

Bien sûr ces orbites périodiques n'apparaissent pas toutes simultanément. Dans le cas du système de Rössler, après le point d'accumulation seules quelques unes d'entre elles sont présentes. Les autres apparaissent au fur et à mesure que le paramètre de contrôle a est augmenté (ceci sera étudié au chapitre 2). Comme nous allons le voir, l'étude des orbites périodiques se fait par l'intermédiaire d'une section de Poincaré.

<i>période</i>	<i>nombre</i>	<i>codage</i>
1	2	0 1
2	1	10
3	2	101 100
4	3	1011 1001 1000
5	6	10111 10110 10011 10010 10001 10000

TAB. 1.1 – Population d’orbites périodiques d’un attracteur à deux lettres

1.3.2 L’application de premier retour

Aspect théorique

On étudie les orbites périodiques par une méthode qui remonte à Henri Poincaré (cf. section 1.1). Celle-ci consiste à prendre, en un point q de l’orbite périodique γ considérée, un petit morceau d’hypersurface W transverse à γ et à considérer, pour chaque $x \in W$, le premier point $p(x)$ où l’orbite issue de x recoupe W : p est l’application de Poincaré. Le fait qu’on ait choisi W transverse à γ implique que p est bien définie au voisinage du point q de W (on a évidemment $p(q) = q$). Le destin de x se reflète dans ses passages successifs dans W : $\dots, p^{-1}(p^{-1}(x)), p^{-1}(x), x, p(x), p(p(x)), \dots$ et la connaissance de p permet de *reconstruire* la dynamique au voisinage de γ , tout au moins si l’on décide de ne pas tenir compte des temps de parcours entre deux traversées successives.

Les applications de Poincaré vérifient la propriété suivante :

Propriété 1 *Deux applications de Poincaré relatives à la même orbite γ sont topologiquement semblables.*

Ainsi à une isotopie près, l’application de Poincaré ne dépend que de l’orbite γ et non pas des choix auxiliaires q et W [12].

Après avoir reconstruit la dynamique au voisinage d’une orbite γ , nous souhaitons connaître l’application de Poincaré de l’ensemble de la population d’orbites périodiques, c’est à dire une connaissance globale du champ de vecteurs.

Nous devons donc construire une hypersurface W' transverse à l’ensemble des orbites périodiques du flot (ϕ_t) associé au champ de vecteurs \mathbf{f} considéré. Elle doit donc traverser l’ensemble du ruban. Cette hypersurface globale W' doit répondre aux propriétés de l’hypersurface locales W définie précédemment, et ce, pour chaque orbite périodique. Nous pouvons ensuite construire une application de premier retour g de W' à elle-même. Ainsi, la connaissance des points $\dots, p^{-1}(p^{-1}(x)), p^{-1}(x), x, p(x), p(p(x)), \dots$ et de g nous permet de reconstruire la dynamique globale du champ de vecteurs \mathbf{f} . Tout comme les applications locale de Poincaré, l’application de premier retour ne doit dépendre que de la population d’orbites périodiques et non pas du choix de W' !

Approche numérique

Pratiquement, un plan de Poincaré (W') se définit par un plan transverse au flot ϕ_t auquel est associé un sens de passage. Etudions les différentes possibilités offertes par le système de Rössler (1.2).

Dans les cas les plus simples (faibles valeurs de a) chaque hyperplan convient (fig. 1.21.a). En d’autre cas où le ruban est plus complexe (valeurs de a plus importantes), l’hyperplan choisi peut couper plusieurs fois

le ruban (fig. 1.21.b). Il existe alors des orbites dont le nombre de points contenus dans l'hyperplan W' va dépendre du choix de ce dernier. L'application de Poincaré dépendra alors de l'hyperplan choisi. Pour remédier à cela, l'ensemble des points doit être restreint par une condition supplémentaire. Cette condition dépendra de la configuration du ruban.

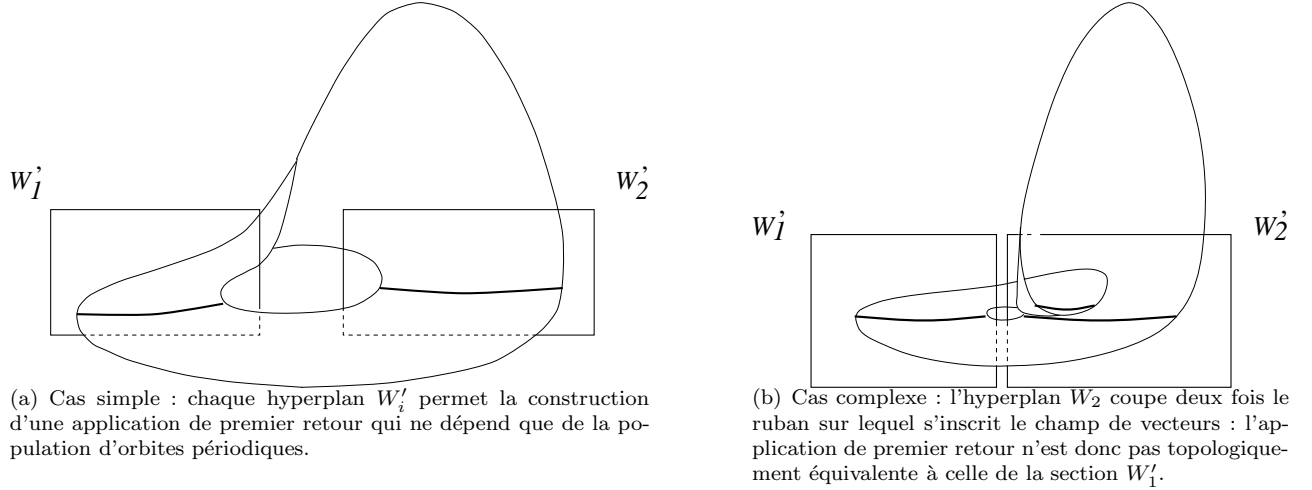


FIG. 1.21 – Difficulté du choix du plan de Poincaré.

Illustrons ceci sur le système de Rössler. Pour les paramètres de contrôle $(a, b, c) = (0.492, 2, 4)$, l'application de premier retour de l'ensemble

$$P_x = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid x = \frac{c^2 - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2}, \frac{\partial \phi_0}{\partial x} > 0 \right\} \quad (1.24)$$

à lui-même est constituée de trois branches monotones (fig. 1.22.b). Par contre l'application de premier retour (détaillée dans la section suivante) dans l'ensemble

$$P_y = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid y = -\frac{c^2 - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}, \frac{\partial \phi_0}{\partial y} > 0 \right\} \quad (1.25)$$

présente un dédoublement de sa structure (fig. 1.22.d) déjà remarqué sur la section de Poincaré (fig. 1.22.c).

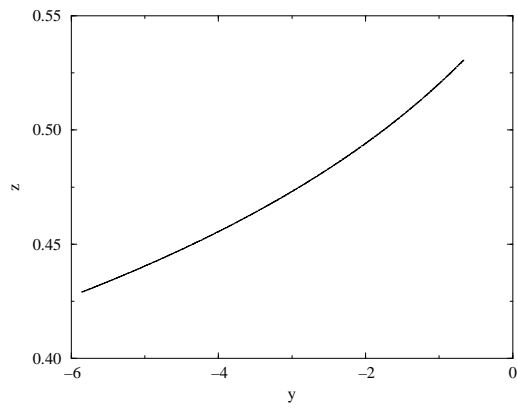
Nous nous retrouvons dans le cas de la figure 1.21.b. Certaines orbites périodiques ne traversent pas le même nombre de fois le plan P_x et le plan P_y : l'un des deux est mal choisi. Une étude approfondie pourrait montrer que la période de chaque orbite est en accord avec le nombre de ses points périodiques dans la section P_x et non dans P_y . Dans la section P_y certaines orbites périodiques ont plus de points que ne le prédit leur période (une orbite de période p doit avoir p points dans une section de Poincaré). Le plan P_y doit donc être restreint. Si théoriquement cette restriction est possible, des difficultés numériques peuvent apparaître.

En pratique, nous choisirons le plan offrant une section de structure aussi simple que possible.

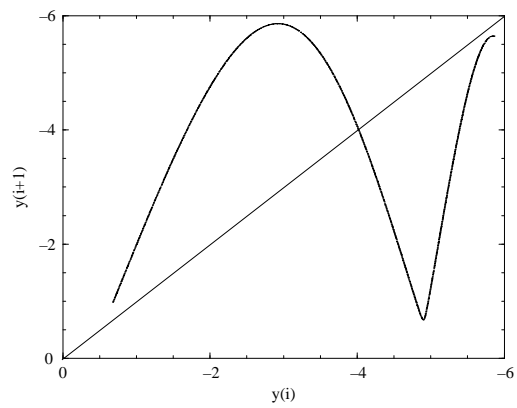
Partition de l'attracteur

Revenons à un chaos faiblement développé afin d'extraire toute l'information contenue dans une section de Poincaré. Rappelons qu'une section de Poincaré est constituée par l'ensemble des intersections d'une trajectoire chaotique avec un plan qui lui est perpendiculaire. La courbe obtenue est donc constituée point par point. Lorsque ces points sont associés à une orbite périodique, ils seront appelés *points périodiques*. Ainsi, une orbite de période p est représentée par p points périodiques dans une section de Poincaré.

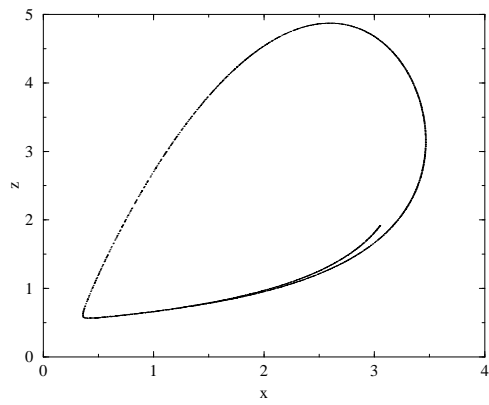
Afin de construire l'application de premier retour de la section de Poincaré à elle-même, numérotions chaque point y_i de la section de Poincaré suivant leur ordre d'apparition. L'application faisant correspondre le point



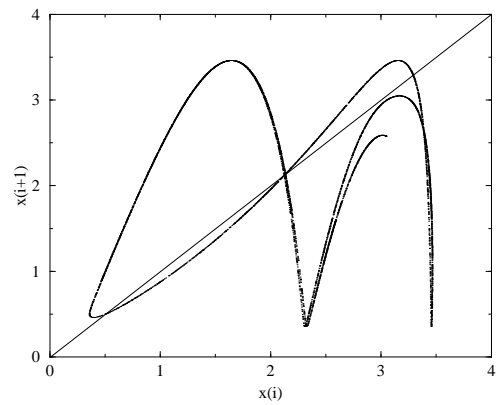
(a) Section de Poincaré P_x



(b) Application de premier retour dans le plan P_x .



(c) Section de Poincaré P_y



(d) Application de premier retour dans le plan P_y .

FIG. 1.22 – Modification de l'application de premier retour lorsque le plan n'est pas choisi correctement. Le dédoublement présent sur la section de Poincaré se retrouve sur l'application de premier retour.

y_{i+1} avec son prédécesseur y_i est tracée (fig. 1.23). Pour $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$, l'application de premier retour dans le plan P_x présente deux branches monotones, une croissante et une décroissante, séparées par un maximum appelé *point critique* (fig. 1.23).

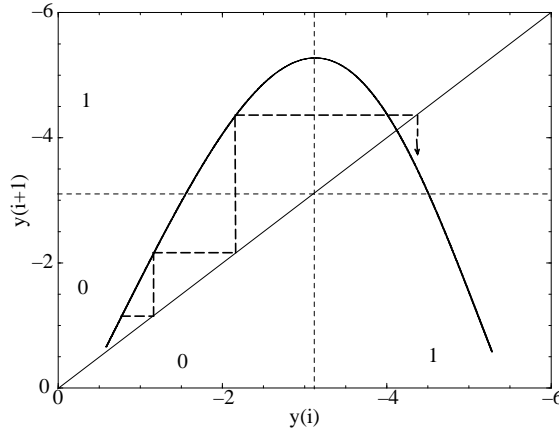


FIG. 1.23 – Application de premier retour d'une section de Poincaré à elle-même associée à l'attracteur de Rössler : $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$

Ce point critique, en déterminant la séparatrice entre la bande 0 et la bande 1, détermine la partition du ruban. La section de Poincaré ne permet pas une détermination de ce point critique (fig. 1.24). Tracer cette application, dite de *premier retour*, revient à reconstruire la section de Poincaré à partir d'une de ses coordonnées (suivant le principe de la redondance de l'information au sein d'un système dynamique non-linéaire [13]). Une construction géométrique simple permet de passer d'un point à l'autre (fig. 1.23). L'application de premier retour met bien en évidence le point critique associé à la coordonnée en y de la séparatrice qui est alors connue avec précision.

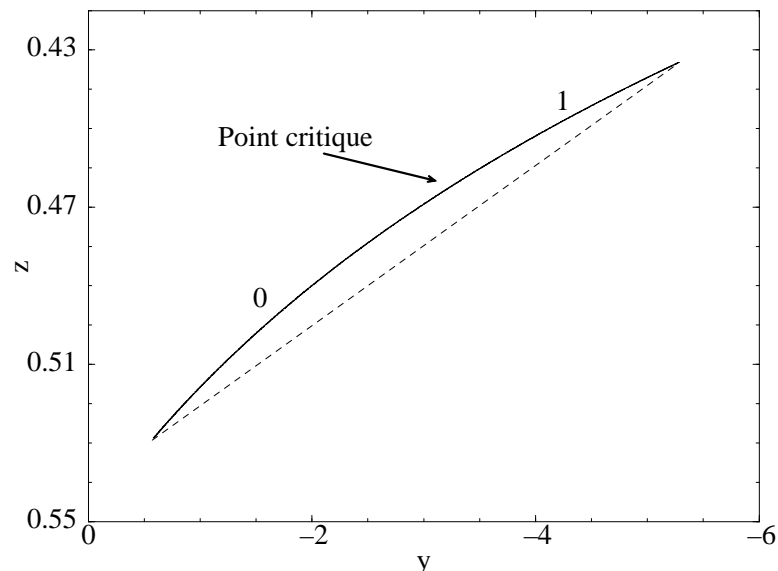


FIG. 1.24 – Section de Poincaré P_x de l'attracteur de Rössler : $(a, b, c) = (0.432, 2, 4)$

La rotation d'un demi-tour associée à la bande 1 peut être retrouvée à partir de cette application de premier retour. Suivons l'évolution de la première branche monotone correspondant à la bande 0 (fig. 1.25.a). L'itéré de chaque point de cette branche est construit à l'aide de la construction géométrique précédente. L'image de

cette première branche sous une itération correspond à l'ensemble de la courbe. Ainsi, entre deux intersections successives avec le plan de Poincaré (une révolution sur l'attracteur), la branche 0 est étirée et réinjectée sur toute la section de Poincaré. De manière identique, la bande 1 est étirée de façon à recouvrir toute la courbe, mais cette fois l'arrangement des points est inversé (fig. 1.25.b). Cette inversion est la signature de la rotation de la bande 1 sur elle-même. De manière générale, une branche monotone croissante préserve l'ordre des points et une branche monotone décroissante le renverse.

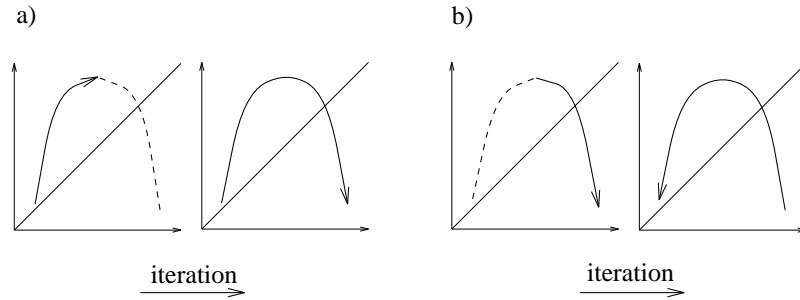


FIG. 1.25 – Evolution des deux branches monotones de l'application de premier retour sous une itération : a) branche 0 et b) branche 1.

Une autre visualisation de ce processus d'étirement et de repliement peut être construite à l'aide du concept de ruban. Celui-ci est divisé en deux bandes (cf. Section 1.3.1). La bande 0 est étirée et réinjectée sur l'ensemble du ruban. La bande 1 est étirée et réinjectée après avoir subi une torsion d'un demi-tour (fig. 1.26). La première bande est donc paire et préserve l'ordre des points, la seconde est impaire et inverse l'ordre des points.

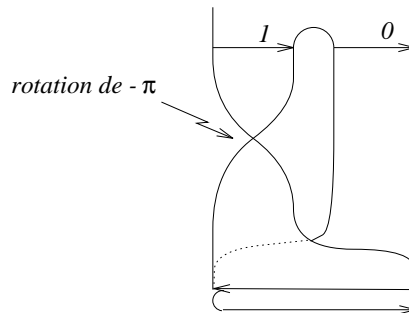


FIG. 1.26 – Etirement et repliement de l'attracteur de Rössler sous la forme d'un graphe de ruban.

Ainsi du point de vue de la dynamique, toute l'information sur l'attracteur de Rössler est contenue dans l'application de premier retour.

1.3.3 Codage du doublement de période

L'utilisation de la dynamique symbolique n'est théoriquement possible qu'en présence d'orbites hyperboliques, ce que ne sont pas les cycles limites lors des bifurcations où une valeur propre a un module égal à 1. Toutefois, à l'instar de beaucoup d'autres [14], nous ferons une extrapolation de cette technique à ces cas par l'introduction d'une pseudo-lettre.

Suivant la partition précédente du ruban de Rössler, le doublement de période peut être décrit par une suite de séquences symboliques. Etant donné que le premier cycle limite apparaît avec un espace tangent dépourvu de toute torsion, il doit être associé à une branche monotone paire ; il est donc codé par la séquence (0). Or nous avons vu qu'un doublement de période ne survenait que lorsque la parité d'une orbite était impaire, ce qui impose au cycle limite d'évoluer vers la bande 1 pour retrouver une parité impaire. Du point de vue de la

section de Poincaré, cela veut dire que le point périodique migre (il n'en existe qu'un seul pour un cycle limite de période 1) de la branche croissante vers la branche décroissante par le point critique. C'est cette migration qui rend délicate la codification de ces points périodiques. Ils naissent sur la branche croissante et migrent sur la branche décroissante et vice-versa, alternativement. Toutefois leur codification réelle correspond à leur position à l'issue de leur migration. En effet, c'est à ce moment que le doublement de période se produit et qu'ils deviennent instables. Les points périodiques ne changeront plus de branches sur l'application de premier retour : la dynamique symbolique peut alors leur être appliquée.

Cependant au cours de ce chapitre, de manière à suivre cette migration des points voisins du point critique, nous coderons les points périodiques au cours de la cascade de doublements de période. Lorsque ces points passeront par le point critique la pseudo-lettre C (dans la mesure où aucun comportement dynamique spécifique ne lui est associé, c'est à dire qu'elle peut être associée à une lettre 0 ou à une lettre 1) sera utilisée. Ceci nous permettra de comprendre plus profondément le mécanisme du doublement de période. Le cycle limite de période 1 naît avec la codification (0). Le point périodique migre par le point critique (séquence (C)) vers la branche décroissante (séquence (1)). Le cycle limite (1) est impair et peut se déstabiliser par dédoublement de période. Son fils, de période 2, est donc codé par la séquence (11) : la séquence est à nouveau paire. Le point périodique voisin du point critique (les autres ne sont pas affectés par le processus de migration) entreprend une migration inverse à celle effectuée par le cycle limite père : il part de la branche décroissante vers la branche croissante. La séquence symbolique du cycle limite de période 2 est successivement (11) \rightarrow (1C) \rightarrow (10). A présent impair, le cycle limite peut se déstabiliser : une nouvelle bifurcation intervient, et ainsi de suite... La cascade de doublements de période est résumée ci-dessous (le tableau se lit de haut en bas et suivant les flèches) :

impair	1	\leftarrow	C	\leftarrow	0	pair	période 1
pair	11	\rightarrow	1C	\rightarrow	10	impair	période 2
impair	1011	\leftarrow	101C	\leftarrow	1010	pair	période 4
pair	10111011	\rightarrow	1011101C	\rightarrow	10111010	impair	période 8

L'évolution du point périodique codé par la lettre C peut être visualisée sur un graphe (fig. 1.27). Nous constatons qu'alternativement le point périodique du point critique évolue de la bande 1 vers la bande 0 ou réciproquement, de la bande 0 vers la bande 1. A chaque évolution est associé un comportement différent du point de vue des torsions de l'espace tangent. L'évolution de la bande 0 vers la bande 1 correspond à l'apparition d'une torsion supplémentaire d'un demi-tour. Au contraire, l'évolution de la bande 1 vers la bande 0 est associée à la disparition d'une torsion locale d'un demi-tour. Une fois le cycle limite devenu impair, la bifurcation se produit, le cycle limite devient une orbite périodique instable. Sa séquence symbolique n'évoluera plus. Au sein d'un attracteur chaotique au delà du point d'accumulation, toutes les orbites périodiques de la cascade de doublements de période sont codées par des séquences symboliques impaires.

Sur cette base, un arbre généalogique peut être construit. Chaque lettre mère du cycle limite initial va générer deux lettres filles qui garderont le nom de leur mère sauf lorsque celle-ci s'appellera C. Du fait de sa légèreté, une mère C donne naissance à deux filles de noms différents : l'une s'appellera C et l'autre 0 si sa tante s'appelle 1 (ou 1 si sa tante s'appelle 0). A la génération suivante, la fille C donnera naissance à deux petite-filles, une C et une 1 (ou 0). La seconde fille 0 donnera naissance à deux petite-filles 0. L'arbre généalogique de cette grande famille est représenté figure 1.28.

A chaque génération, deux sœurs de noms différents naissent. Alternativement, une fille C a une sœur de nom 1 ou 0. Nous remarquons que les trois noms n'apparaissent qu'à la troisième génération, c'est à dire pour le cycle limite de période 4. Cette particularité aura des répercussions dans la self-similarité de la cascade de doublements de période (traitée dans la Section 1.4.3). Nous savons maintenant prédire le nombre de points périodiques codés respectivement par les lettres 0, C et 1. Ceci dit, nous ne sommes pas encore capable de prédire leur localisation dans une section de Poincaré. Pour cela nous devons avoir recours aux tresses.

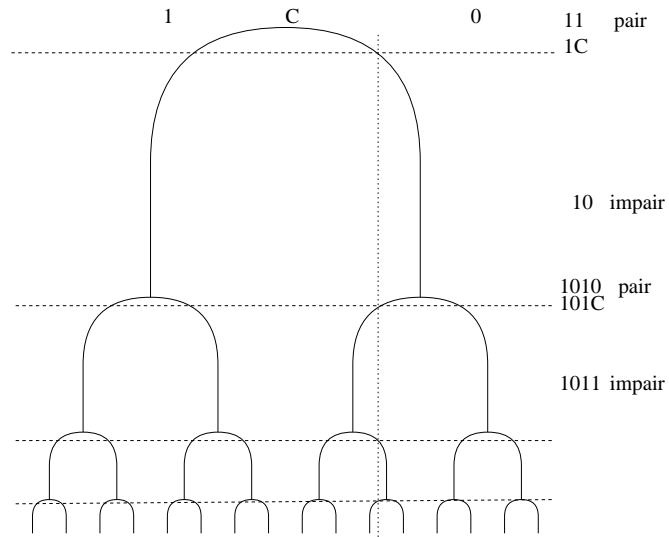


FIG. 1.27 – Evolution des points périodiques codés par la lettre C

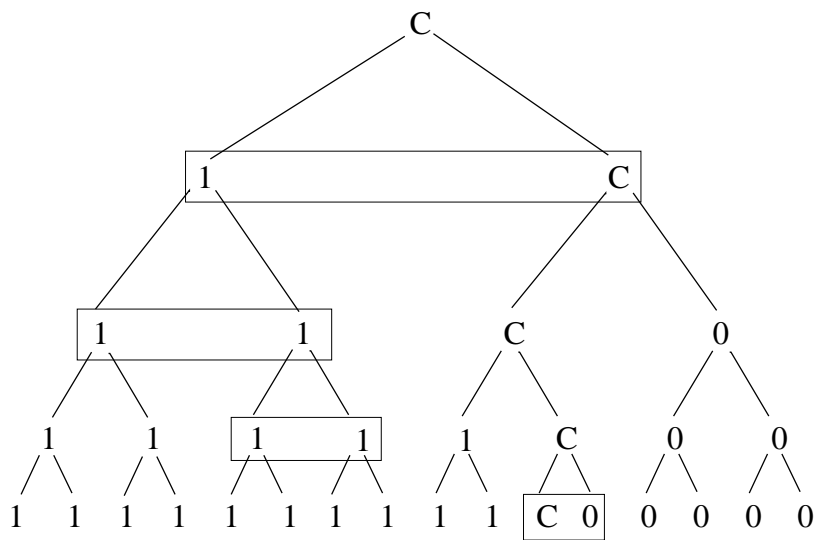


FIG. 1.28 – Arbre généalogique de la cascade de doublements de période.

1.4 Les "tresses"

La cascade de doublements de période correspond à un mécanisme qui engendre des orbites périodiques qui sont toutes instables au delà du point d'accumulation. Nous avons obtenu une codification de chacune d'entre elles par l'utilisation d'une dynamique symbolique. Celle-ci repose sur une partition de l'attracteur qui se développe au delà du point d'accumulation de la cascade. Cette décomposition de l'attracteur est basée sur des critères topologiques et sur l'application de premier retour. Suivant les propriétés de chacune des bandes nous pourrions obtenir la localisation relative des points périodiques au sein de l'attracteur. De là les tresses représentatives des orbites périodiques seront dressées.

1.4.1 Les patrons

Nous avons vu (Section 1.3.2) que l'étirement et le repliement de l'attracteur pouvaient être vus sous la forme d'un graphe de ruban. Ce concept découle des travaux de J. S. Birman et R. F. Williams [15]. Au début des années 80, l'extraction numérique des orbites périodiques d'un flot $\phi_t : R^3 \rightarrow R^3$ ($t \in R$) défini par un système d'équations différentielles ordinaires n'est pas aisée. Aussi une approche indirecte se révèle nécessaire et est introduite par R. F. Williams : il cherche une structure relative au flot ϕ_t dans R^3 qui lui permet de projeter les orbites périodiques sur un sous-ensemble bidimensionnel de R^3 . Cette "variété ramifiée" offre la possibilité de décrire les orbites périodiques par l'intermédiaire d'une application de Poincaré. Elle correspond au concept de ruban introduit par O. E. Rösslér [16] pour décrire son système. Avec les invariants topologiques tels que les nombres de rotations, H. G. Solari et R. Gilmore [17] montrent qu'il est possible de déterminer l'équivalence de deux attracteurs. Accompagnés de G. B. Mindlin, X. J. Hou et N. B. Tuffillaro [18], ils construisent une vue synthétique qui prend en compte le nombre de rotations locales de la variété ramifiée de R. F. Williams [19] : le *patron* (template).

Un patron peut être vu comme l'union d'un *graphe de ruban* et d'un *graphe de jonction* permettant la connection entre les deux extrémités du graphe de ruban. Dans le cas du ruban simplement plié de Rösslér le patron est obtenu par l'union du graphe de ruban proposé Section 1.3.2 et d'une simple bande (fig. 1.29.a).

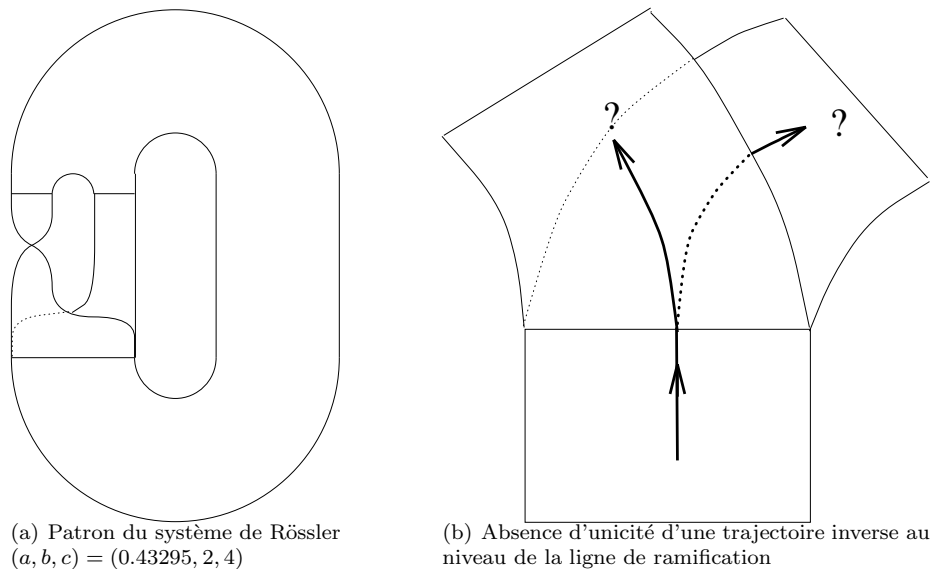


FIG. 1.29 – Construction d'un patron du système de Rösslér .

Au patron est associé un semi-flot $\overline{\phi}_t$. En effet, $\overline{\phi}_t$ ne peut être un flot, car en inversant le temps, une orbite peut avoir deux futurs au niveau de la ligne de ramification (fig. 1.29.b). Les propriétés du patron ont été décrites par un théorème de J. S. Birman et R. F. Williams [20] :

Théorème 1 *Soit un flot ϕ_t sur une variété tridimensionnelle M possédant une structure hyperbolique sur un ensemble de chaînes récurrentes, il existe une variété ramifiée bidimensionnelle H associée à un semi-flot $\bar{\phi}_t$, $t > 0$, sur H plongée dans M telle que les orbites périodiques de $\bar{\phi}_t$ correspondent de manière injective (à quelques exceptions spécifiques près) à celles de ϕ_t . Sur tout sous-ensemble fini d'orbites périodiques, la correspondance peut être faite par l'intermédiaire d'une isotopie.*

De cet objet, nous sommes capable d'extraire la localisation relative des orbites périodiques. Pour cela, prenons le graphe de ruban associé au système de Rössler (fig. 1.30). Chacune des bandes est réinjectée sur l'ensemble du ruban au niveau de la ligne de ramification. Aussi, après un tour sur le patron, chaque bande se verra réinjectée à la fois en elle-même et dans la seconde bande. De cette manière, chaque bande peut être divisée en deux parties associées respectivement à une réinjection dans la bande 0 et une réinjection dans la bande 1 (fig. 1.30).

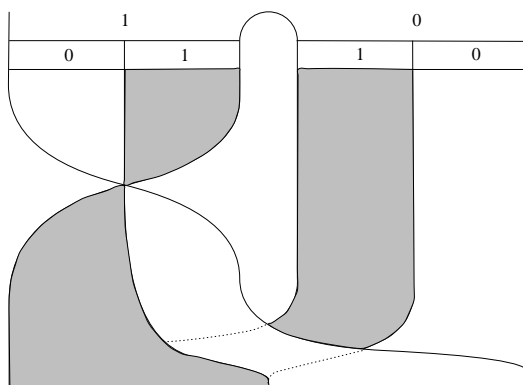


FIG. 1.30 – Division de chaque bande en deux sous-bandes associées respectivement à une réinjection dans la bande 0 et la bande 1 (grisée).

Nous pouvons déjà remarquer que, lors de la réinjection, la bande 0 préserve l'ordre des bandes et que la bande 1, en raison de sa torsion locale, les inverse. Si nous poursuivons cette subdivision des bandes, chaque sous-bande peut être à nouveau subdivisée : chaque "sous-sous-bande" obtenue correspond à un futur bien déterminé pour toute trajectoire qui la visite (fig. 1.31). Ainsi la "bandelette" la plus à gauche a un futur codé par la séquence (100) ; la plus à droite (000), et caetera.

Plus une bande est subdivisée, mieux est connu son futur. A l'aide de la subdivision réalisée figure 1.31 nous pouvons, par exemple, prédire les positions relatives des orbites de période 3 et de période 1. Nous donnons un exemple avec les orbites périodiques codées par les séquences (100) et (1) (fig. 1.32).

L'indexation des subdivisions répond à une règle de récurrence très simple [21]. Rappelons que la bande d'un patron préserve l'orientation si le nombre de torsions locales (nombre de demi-tours sur elle-même) est un entier pair. Elle inverse l'orientation si le nombre de torsions locales est impair. Un arbre de localisation peut alors être construit. A la première génération ($n = 1$), les noms symboliques des bandes sont écrits dans l'ordre fixé par le patron (1, 0 pour celui de Rössler). La seconde génération ($n = 2$) est obtenue par lecture (de gauche à droite) de la première génération de l'arbre et du report en accord avec la règle d'orientation associée à chaque bande : si la $i^{\text{ème}}$ bande du patron préserve l'orientation alors les noms symboliques sont écrits suivant l'ordre de la lecture (1, 0 pour la bande 0) ; si elle inverse l'ordre alors l'écriture se fait suivant l'ordre inverse de lecture (0, 1 pour la bande 1). Ainsi la $n + 1^{\text{ème}}$ génération est obtenue à partir de la $n^{\text{ème}}$ suivant la règle précédente. Nous obtenons alors l'arbre de localisation des points périodiques (fig. 1.33).

Deux orbites de périodes respectives n_1 et n_2 ($n_1 \neq n_2$) pourront être localisées relativement l'une à l'autre en développant suffisamment l'arbre. Une orbite pourra être reconstituée en suivant ses différents points périodiques : dans l'exemple de l'orbite codée par (100), la trajectoire suit le chemin (100) \rightarrow (001) \rightarrow (010) \rightarrow (100).

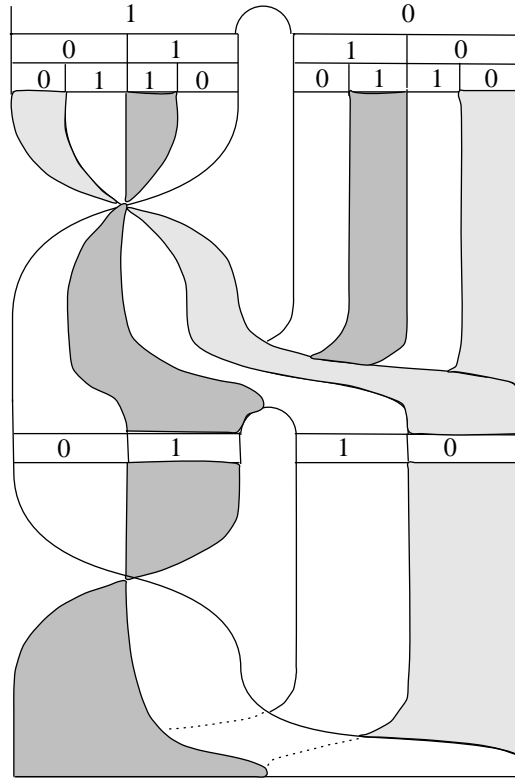


FIG. 1.31 – Division de chaque bande en quatre sous-bandes associées aux quatre futurs possibles (00), (01), (11) et (10).

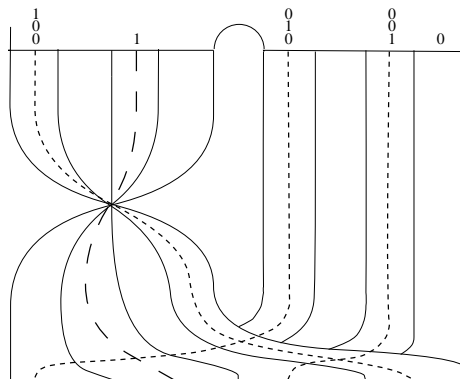


FIG. 1.32 – Position relative des orbites périodiques codées par les séquences (100) et (1).

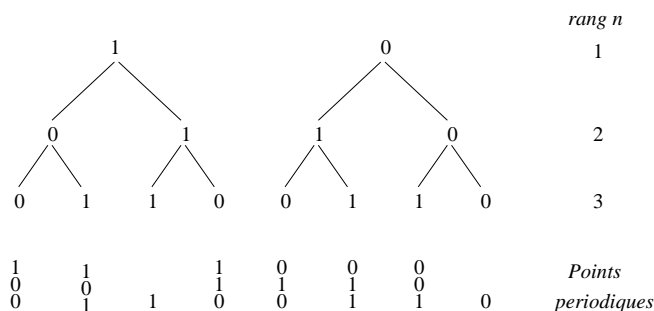


FIG. 1.33 – Arbre de localisation des points périodiques

1.4.2 Les tresses

Nous sommes maintenant en mesure de construire la projection de toute orbite périodique sur le patron. Ainsi l'orbite de période 2 codée par la séquence (10) de la cascade de doublements de période peut être représentée par le nœud de la figure 1.34 :

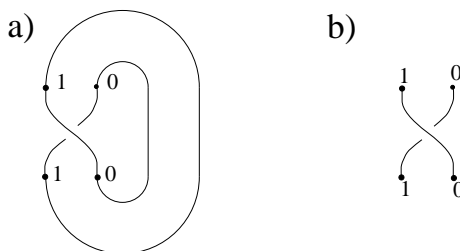


FIG. 1.34 – a) Nœud représentatif de l'orbite de période 2 codée par (10) et b) la tresse qui lui est associée

Le théorème d'Alexander [25] stipule que tout lien orienté peut être représenté par une tresse (braid). Une tresse géométrique est construite entre deux lignes horizontales avec une base de n points périodiques relatifs à une orbite de période n . La représentation d'un nœud par une tresse n'est pas unique et à une tresse peuvent être associés deux nœuds différents. En effet, l'invariant de J. Alexander, une expression algébrique, ne permet pas de distinguer catégoriquement deux nœuds : deux nœuds dont les polynômes d'Alexander diffèrent sont distincts, malheureusement, l'égalité des polynômes d'Alexander ne prouve pas que les nœuds correspondants sont équivalents.

Une tresse peut être décomposée en une succession de croisements de cordes. Cela permet une étude algébrique par le groupe des tresses [21]. La base de points des deux lignes horizontales est numérotée de la gauche vers la droite. Une intersection entre deux cordes peut être définie par un opérateur b_i : il représente le fait que la corde issue du $i^{\text{ème}}$ point de la base supérieure est connectée au $i + 1^{\text{ème}}$ point de la base inférieure en passant par dessus la corde issue du $i + 1^{\text{ème}}$ point et connectée au $i^{\text{ème}}$ point de la base inférieure (fig. 1.35.a). L'opérateur inverse b_i^{-1} est naturellement défini par une intersection dans l'autre sens (fig. 1.35.b).

Deux tresses sont équivalentes si elles peuvent être déduites l'une de l'autre à l'aide des trois relations suivantes [22] :

$$\begin{cases} b_i b_j = b_j b_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \\ b_i b_i^{-1} = I \end{cases} \tag{1.26}$$

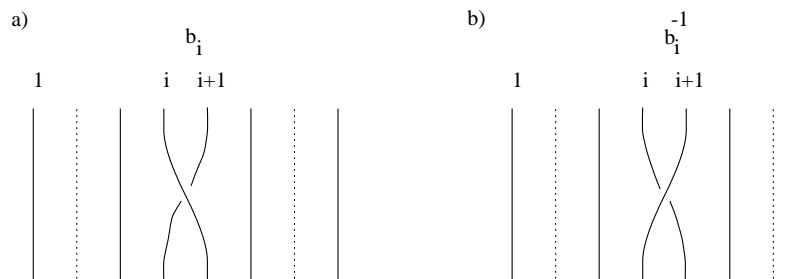


FIG. 1.35 – Opérateur d'intersection : a) b_i , croisement droit et b) b_i^{-1} , croisement gauche

Un exemple de deux tresses équivalentes au nœud représentatif de l'orbite de période 4 codée par la séquence (1011) de la cascade de doublements de période est donné figure 1.36. Nous laissons au lecteur le plaisir de la démonstration de leur équivalence.

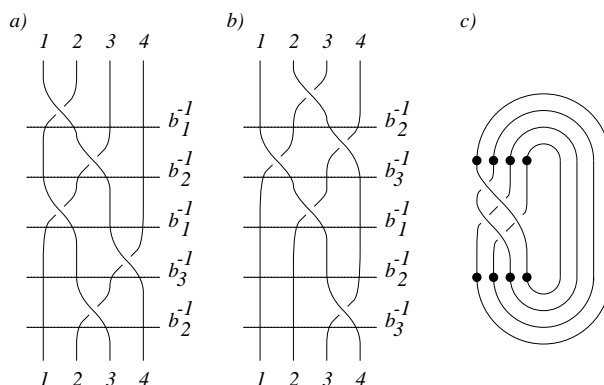


FIG. 1.36 – a) et b) : deux tresses équivalentes (orbite de période 4 de la cascade de doublements de période) et c) nœud défini par les tresses équivalentes

Par la suite, nous n'utiliserons pas cette algèbre. Par souci de clarté, nous choisissons de numéroter les points suivant leur ordre de visite par l'orbite périodique en choisissant le point le plus à l'extérieur de l'attracteur comme étant le premier (voir chapitre 2). Nous pensons qu'ainsi il est plus aisé de suivre le déroulement d'une orbite périodique. Chaque corde de la tresse relie le $i^{\text{ème}}$ point périodique de la base supérieure au $i + 1^{\text{ème}}$ point de la base inférieure dans la numérotation choisie (fig. 1.37). Suivant la théorie des tresses, au plus deux cordes se croisent à la fois. Les tresses des orbites de période 1 à 16 sont représentées figure 1.37.

1.4.3 Self-similarité du doublement de période

Structure self-similaire

Afin de décrire le mécanisme du doublement de période, nous avons dû utiliser deux lettres symboliques 0 et 1 associées à une pseudo-lettre C. Ces trois symboles, présent uniquement à partir de la période 4 (voir colonne centrale du récapitulatif encadré page 45) déterminent trois classes de cordes sur les tresses représentatives des cycles limites apparaissant successivement dans la cascade de doublement de période. Ces trois classes sont arrangées relativement suivant l'organisation de l'application de premier retour (fig. 1.38).

La classe 0, située à l'extrémité gauche de l'application de premier retour, est représentative de la bande 0. Chaque corde de cette classe est reliée à la base inférieure sans intersection avec une autre corde de sa classe. Tout point périodique de cette classe a pour ancêtre (de la génération de la période 4) un 0. La classe 1, située à l'extrémité de la branche décroissante de l'application de premier retour est représentative de la bande 1. L'ensemble des points périodiques de la base supérieure appartenant à cette classe est relié à la base

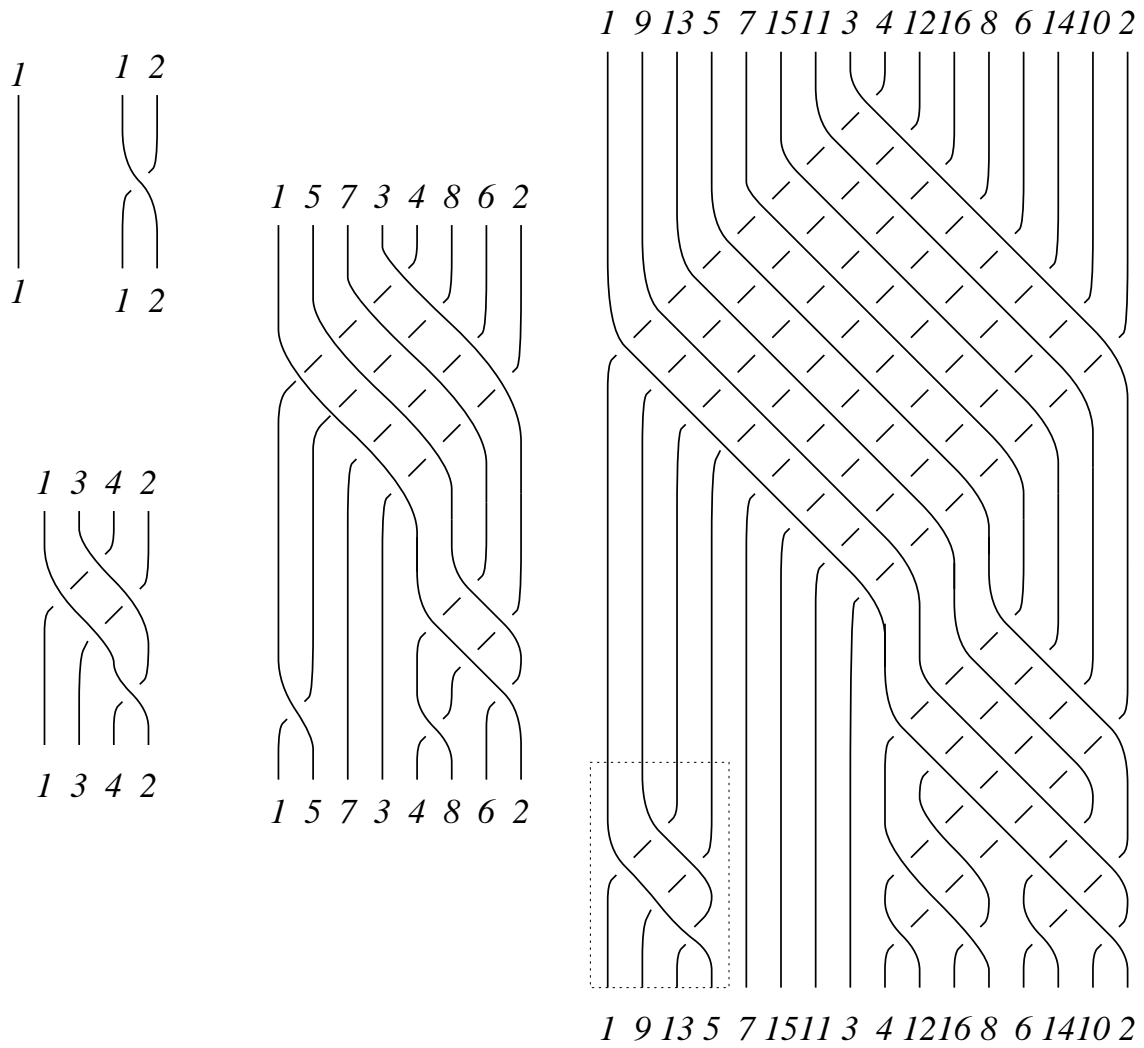


FIG. 1.37 – Tresses représentatives des orbites de période de 1 à 16 de la cascade de doublements de période : la tresse de l'orbite de période 4 est retrouvée au sein de celle de l'orbite de période 16.

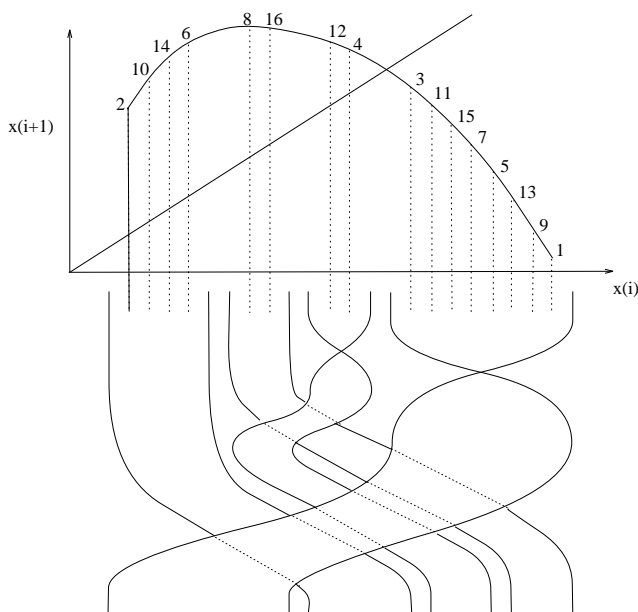


FIG. 1.38 – Arrangement relatif des trois classes de points périodiques des cycles limites de la cascade de doublements de période.

inférieure de telle manière que l'ordre des points se trouve renversé. Ainsi, l'ensemble de cette classe des cordes s'enroule sur lui-même. Ces points périodiques ont pour ancêtre (de la génération de la période 4) un 1. La dernière classe C, représentative du voisinage du point critique et associée aux migrations, est imbriquée entre les deux premières. Tout point périodique de cette classe a un ancêtre C (génération de la période 4). A elle seule, cette classe peut être décrite en trois sous-classes : une sous-classe 0, une 1 et une C ! En effet, si nous suivons l'évolution de la classe C à partir de la période 4 (fig. 1.28) de génération en génération, nous dégagons successivement deux sous-classes, 1 et C (période 8), puis à nouveau trois sous-classes, 0, 1 et C (période 16). En d'autres termes, la classe C donne, à elle seule, naissance aux trois types de comportement associés à chaque classe. C'est de cette propriété que provient la structure self-similaire de la cascade de doublements de période. De ce fait la tresse représentative de la classe C de l'orbite de période 16 est identique à la tresse complète de l'orbite de période 4.

Renormalisation

Il existe une autre méthode pour mettre en évidence la propriété de self-similarité : la renormalisation.

Cette technique est basée sur l'étude de la séquence symbolique associée à la trajectoire périodique issue du point critique. Cette séquence symbolique est appelée *séquence principale*. Tous les cycles limites issus du point critique sont dits *superstables* [23]. Lorsqu'il naît, le cycle limite de période 1 de la cascade de doublements de période est obtenu par itération du point critique sur l'application de premier retour. Nous avons choisi de le coder par la pseudo-lettre C. Afin d'obtenir la séquence du cycle limite superstable de période 2^n , nous copions deux fois la *séquence principale* de l'orbite superstable de période 2^{n-1} , et, dans une des copies nous remplaçons la pseudo-lettre C par la lettre 0 ou 1 alternativement. Nous obtenons la suite de séquence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C & 2^0 \\ \bar{1}C & 2^1 \\ 1\bar{0}1C & 2^2 \\ 101\bar{1}101C & 2^3 \\ 1011101\bar{0}1011101C & 2^4 \end{array} \right.$$

où les lettres $\bar{1}$ et $\bar{0}$ désignent les filles de la lettre C qui ne portent pas le nom de leur mère. Nous retrouvons l'alternance des 0 et 1.

I. Procaccia, S. Thomae et C. Tresser [14] montrent que de nouvelles lettres, ou hyperlettres, peuvent être définies. Etant donné que ces séquences symboliques désignent des cycles limites issus d'une cascade de doublement de période, ils regroupent les lettres par blocs de 2 et codent ces derniers en fonction de leur parité : le bloc (10) est impair et est *renormalisé* par la lettre impaire 1, le bloc (11) pair, par la lettre paire 0 et le pseudo-bloc (1C) par la pseudo-lettre C . Il est à noter que les blocs (00) ou (0C) n'apparaissent pas au sein de la cascade de doublements de période. Ils ont ainsi appliqué une technique de renormalisation. Cette technique est similaire à celle appliquée aux blocs de spin dans le contexte des groupes de renormalisation des phénomènes critiques [24].

Prenons par exemple, le cycle limite de période 16 codé par la séquence

$$101110101011101C$$

Appliquons la transformation de renormalisation T_R suivante [14] :

$$\begin{cases} 10 \rightarrow 1 \\ 1C \rightarrow C \\ 11 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

à ce cycle limite, nous obtenons la séquence suivante :

$$1011101C$$

qui correspond à la séquence du cycle limite de période 8. Réitérons le processus et la séquence du cycle limite de période 4 est alors obtenue

$$101C$$

De cette manière, nous trouvons que la séquence principale présente pour toute valeur du paramètre de contrôle α , durant la cascade de doublement de période, est invariante sous la transformation de renormalisation.

Ceci signifie que les propriétés topologiques du cycle limite de période 4 sont identiques à celles du cycle limite de période 16 ou à celles de n'importe quelle autre période 2^n . Il y a invariance d'échelle de ces propriétés. Ceci est une autre manière de justifier l'existence d'une loi d'échelle au sein de la cascade de doublements de période.

1.5 Conclusion

À travers la cascade de doublements de période, nous avons introduit les principaux concepts de la caractérisation dynamique d'un attracteur. Précisons que la construction d'une dynamique symbolique permet d'établir une équivalence entre la topologie et la caractérisation du comportement dynamique du système. Au cours de ce chapitre, l'attention a été portée sur l'intérêt de la description topologique par l'intermédiaire des nombres de self-rotations.

Le concept de patron a également été introduit. Il nous reste à illustrer plus largement cette schématisation de l'attracteur par la caractérisation systématique des attracteurs chaotiques générés par le système de Rössler pour différentes valeurs des paramètres de contrôle.

L'ordre du chaos va ainsi être mis en évidence et l'organisation des différentes orbites périodiques de l'attracteur codifiée. Cette étape sera un véritable pas vers l'analyse d'un comportement dynamique aussi complexe que celui d'un attracteur chaotique.

Bibliographie

- [1] **Henri Poincaré.** *Oeuvres complètes*, 12 volumes, Gauthier-Villars, Paris.
- [2] **P. Cvitanović.** Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and Quantum Chaos, *Physica D*, 51, pp. 138-151, 1991.
- [3] **Otto E. Rössler.** An Equation for Continuous Chaos, *Physics Letters A*, 57, pp. 387-398, 1976.
- [4] **P. Couillet, C. Tresser.** Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *Journal de Physique*, Colloque C5, supplément au n°8 (39), pp. C5-25, 1978.
- [5] **Mitchell J. Feigenbaum.** Quantitative Universality for a class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19 (1), pp. 25-52, 1978.
- [6] **P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal.** *L'ordre dans le chaos*, Vers une approche déterministe de la turbulence, Herman, Paris, 1992.
- [7] **P. Kent, J. Elgin.** Noose bifurcation of periodic orbits, *Nonlinearity*, 4, pp. 1045-1061, 1991.
- [8] **T. Uezu.** Topology in Dynamical Systems, *Physics Letters A*, 93 (4), pp. 161-166, 1983.
- [9] **L. H. Kauffman.** *On knots*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
- [10] **P. Melvin, N. B. Tuffillaro.** Templates and Framed Braids, *Physical Review A*, 44 (6), pp. 3419-3422, 1991.
- [11] **Y. Aizawa, T. Uezu.** Topological Aspects in Chaos and in 2^k period-doubling cascade, *Progress in Theoretical Physics*, 67 (3), pp. 982-985, 1982.
- [12] **M. Demazure** *Catastrophes et Bifurcations*, Ellipse, Paris, 1989.
- [13] **N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw.** Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45 (9), pp. 712-716, 1980.
- [14] **I. Procaccia, S. Thomae, C. Tresser.** First-return maps as a unified renormalization scheme for dynamical systems, *Physical Review A*, 35 (4), pp.1884-1900, 1987.
- [15] **J. S. Birman, R. F. Williams.** Knotted periodic orbits in dynamical systems I : Lorenz's equations, *Topology*, 22 (1), pp. 47-82, 1983.
- [16] **O. E. Rössler.** *Chaos*, in *Structural Stability in Physics*, eds. W. Güttinger, H. Eickemeier, Springer-Verlag, pp. 290-309, 1979.
- [17] **H. G. Solari, R. Gilmore.** Relative Rotation Rate for Driven Dynamical Systems, *Physical Review A*, 37 (8), pp. 3096-3109, 1988.
- [18] **G. B. Mindlin, X. J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, N. B. Tuffillaro.** Classification of Strange Attractors by Integers, *Physical Review Letters*, 64 (20), pp. 2350-2353, 1990.
- [19] **R. F. Williams.** The Structure of Lorenz attractors. *IHES Publications Mathématiques*, 50, pp.73-100, 1979.
- [20] **J. S. Birman, R. F. Williams.** Knotted periodic orbits in dynamical systems II : Knot holders for fibered knots, *Contemporary Mathematics*, 20, pp. 1-60, 1983.
- [21] **N. B. Tuffillaro, T. Abbott, J. Reilly.** *An experimental approach to non linear dynamics and chaos*, Addison-Wesley, New York, 1992.

- [22] **E. Artin.** Theory of Braids, *Annals of Mathematics*, 48 (1), pp. 101-126, 1947.
- [23] **P. Collet, J. P. Eckmann.** *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progress in Physics, Ed. A. Jaffe et D. Ruelle, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [24] **M. Le Bellac.** *Des phénomènes critiques aux champs de jauge : une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, Interéditions/Éditions du CNRS, Paris, 1987.
- [25] **M. Wadati, T. Deguchi. Y. Akutsu.** Exactly solvable models and knots theory, *Physics Reports*, 180 (4 et 5), pp. 247-332, 1989.
- [26] **J. L. Chabert, A. D. Dalmedico.** *Les idées nouvelles de Poincaré*, extrait de Chaos et Déterminisme, Point Seuil, Paris, 1992.
- [27] **J. D. Crawford, S. Omohundro.** Global Structure of Period-doubling flows, *Physica D*, 13, pp. 161-180, 1984.

Chapitre 2

Le système de Rössler

2.1 Introduction

Il y a un siècle, Henri Poincaré remarque que la compréhension profonde d'un système dynamique est liée à l'identification de ses orbites périodiques instables [1]. En 1963, Edward N. Lorenz propose son modèle simplifié de la convection [2]. L'avènement des ordinateurs lui permet d'intégrer son système et d'en visualiser les trajectoires dans l'espace des états. Depuis, des comportements chaotiques ont été décelés dans de nombreux systèmes dynamiques et l'extraction des orbites périodiques instables est devenue une réalité. Aussi la caractérisation des attracteurs étranges est devenue un enjeu important de la dynamique des systèmes.

Il existe actuellement deux approches principales pour comprendre le comportement chaotique d'un système dynamique : l'approche métrique et l'approche topologique. L'approche métrique est basée sur l'étude des distances entre les points de l'attracteur étrange. Il est alors usuel de calculer les exposants de Lyapunov [3], les dimensions [4], etc. En règle générale, ces calculs requièrent de grands ensembles de données, sont gourmands en temps de calcul et sont peu fiables devant la présence de bruit. L'approche topologique est plus récente. Elle est basée sur l'observation de deux mécanismes responsables de la création d'un attracteur étrange : l'étirement et le repliement. Le phénomène d'étirement, qui implique la divergence de trajectoires initialement proches dans l'espace des états, est responsable de la sensibilité aux conditions initiales. Le repliement, qui préserve la trajectoire d'une éjection hors d'un domaine borné de l'espace des états, est responsable du phénomène de récurrence caractéristique du comportement chaotique. Ces deux mécanismes organisent l'attracteur étrange de manière unique autour du squelette d'orbites périodiques [5]. Cela signifie que si nous pouvons déterminer l'architecture des orbites périodiques, nous pouvons identifier les mécanismes d'étirements et de repliements. Cette identification est topologique et est donnée par un ensemble d'entiers [6] qui est robuste face au bruit [7].

Cependant l'attracteur de Lorenz possède une symétrie axiale, ce qui en complique singulièrement la caractérisation. Dès 1976, O. E. Rössler pressent que cette symétrie constitue un problème. Aussi, soucieux de simplifier l'étude des systèmes chaotiques, il crée un ruban dépourvu de symétrie et générant un comportement chaotique analogue à celui observé pour le système de Lorenz. Il propose alors un système d'équations différentielles [8] vérifiant ces propriétés :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (2.1)$$

L'attracteur chaotique généré par ce système est représenté dépourvu de ses transitoires figure 2.1. Cet attracteur obtenu pour les paramètres $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$ est appelé par O. E. Rössler lui-même *ruban simplement plié*. Ce système possède deux points fixes de coordonnées :

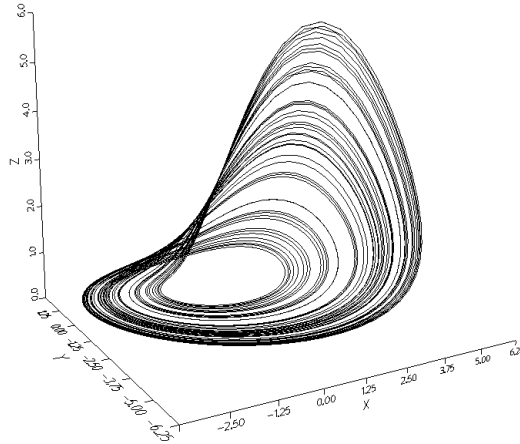


FIG. 2.1 – Ruban simplement plié proposé par O. E. Rössler : $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$.

$$\begin{cases} x_{\pm} = \frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2} \\ y_{\pm} = -\frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2a} \\ z_{\pm} = \frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2a} \end{cases} \quad (2.2)$$

Les trajectoires sont organisées par ces deux points fixes auxquels peuvent être associés deux vortex (fig. 2.2). Alors que l'un, F_- de coordonnées (x_-, y_-, z_-) , est au centre de l'attracteur et pilote la divergence en spirale, l'autre, F_+ de coordonnées (x_+, y_+, z_+) , en est relativement éloigné et gouverne le repliement de l'attracteur sur lui-même (fig. 2.2). Le point fixe F_+ définit un plan séparateur qui délimite le bassin d'attraction. Toute trajectoire en deçà du plan contenant F_+ est asymptotiquement attirée vers l'attracteur. Au contraire, toute trajectoire au delà de ce plan est irrémédiablement éjectée à l'infini [9].

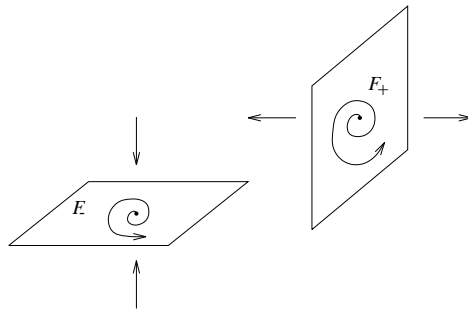


FIG. 2.2 – Structure des points fixes du système de Rössler : au point F_- est associée la divergence en spirale des trajectoires et au point F_+ correspond le vortex qui confine les trajectoires sur un attracteur borné dans l'espace des phases. Le plan contenant le point fixe F_+ est associé à un plan séparateur du bassin d'attraction ; au delà les trajectoires divergent à l'infini.

Ainsi, O. E. Rössler fut capable d'extraire les structures attractives asymétriques simples de l'attracteur de Lorenz. Ce système autonome (ne dépendant pas du temps) possède seulement un terme non-linéaire, le produit

des deux variables x et z dans la troisième équation. Considérons tout d'abord les deux premières équations. Nous supposons que z est négligeable. Le sous-système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases} \quad (2.3)$$

présente un point fixe instable, c'est à dire que, dans le plan (x, y) , les trajectoires s'en éloignent en spirale. Cette divergence des trajectoires est le premier ingrédient de l'action de mélange du chaos.

En fait, la divergence est contenue dans le sous-système linéaire dont les trois équations se résument à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b - cz \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans ce cas, la divergence des trajectoires sera purement et simplement continue : les trajectoires divergeront à une distance infinie de l'origine. Afin de confiner la divergence dans un attracteur fini, le terme non-linéaire est requis. La constante c dans la troisième équation du système (2.1) agit comme un seuil de transition au repliement non-linéaire. Considérons la troisième équation seule ; quand la valeur de x est inférieure à la constante c , le coefficient de z est négatif, et le sous-système z est stable, tendant à restituer z à une valeur proche de $-\frac{b}{x-c}$. De quelque manière, si x devait excéder c , alors z apparaîtrait dans la troisième équation multiplié par un facteur positif et la restitution précédente du sous-système z divergerait. Choisir b supérieur à 0 assure que cette divergence sera dans la direction des z positifs [9].

Une trajectoire en spirale se répand dans un plan proche et parallèle au plan (x, y) . Quand x devient suffisamment grand, la trajectoire transite sur le sous-système z . Une fois z suffisamment grand, le terme z de la première équation entre en jeu et \dot{x} devient grand et négatif, renvoyant la trajectoire sur des x plus faibles. Finalement x décroît sous c , la variable z s'efface d'elle-même et la trajectoire se retrouve une nouvelle fois dans le plan (x, y) . Par la réinjection des z dans l'équation \dot{x} , les trajectoires sont mélangées et réinsérées repliées sur elles-mêmes, près de l'origine où elles commencent une nouvelle spirale.

Un tel système a une richesse de comportement insoupçonnée. Ainsi, sous des variations des paramètres de contrôle, le comportement asymptotique du système de Rössler peut être un cycle limite ou un attracteur étrange plus ou moins complexe. Ce système permit à O. E. Rössler de modéliser des systèmes chimiques. De tels systèmes sont souvent gouvernés par des réactions à plusieurs espèces dont les différentes échelles de temps peuvent s'étaler sur plusieurs ordres de grandeur. Ces multiples échelles de temps résultent de variétés "lentes" dans l'espace des états où les trajectoires sont asymptotiquement confinées. En 1976, O. E. Rössler [24] suggère une interprétation intuitive du chaos chimique.

Son approche voit le flot comme une variété plissée continuellement réinjectée au voisinage d'un point fixe instable. Il suppose que la dynamique s'inscrit sur une surface (un ruban). Dans des cas très particuliers, la trajectoire peut être réinjectée exactement sur le point fixe instable. Nous sommes alors en présence d'une trajectoire homocline : ces trajectoires seront étudiées au cours de ce chapitre. Nous avons vu que la route vers le chaos de ce système était le scénario de doublements de période [10] (chapitre 1). Nous nous proposons maintenant d'étudier et de caractériser les différents attracteurs apparaissant sur la ligne de l'espace des paramètres définie par $(a, b, c) = (\text{variable}, 2, 4)$. Pour cela, les applications de premier retour et les patrons seront largement utilisés afin de tirer parti de la puissance de la caractérisation topologique.

2.2 Le ruban simplement plié

Le ruban simplement plié proposé par O. E. Rössler correspond à la configuration topologique la plus simple que peut adopter un attracteur étrange. La partition génératrice de cet attracteur, basée sur une division de l'attracteur en bandes aux caractéristiques bien distinctes, définit deux régions de l'espace des phases

sur lesquelles est construite une dynamique symbolique. Cette partition est obtenue à l'aide d'une application de premier retour. Chaque région sera alors caractérisée par ses propriétés topologiques. Enfin le patron, représentation synthétique de l'attracteur, sera dressé : il regroupe toutes les propriétés topologiques du ruban simplement plié. Au cours de cette section, nous détaillerons l'ensemble de cette procédure.

2.2.1 Partition du ruban

Idéalement, une application de Poincaré se définit au voisinage d'une orbite périodique ζ d'un flot $\phi(t)$ plongé dans \mathbb{R}^n généré par un champ de vecteurs non-linéaire f . Une section $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ d'intersection locale, de dimension $n - 1$, constitue une hypersurface qui est telle que le flot lui soit toujours transverse. Ceci est réalisé par la condition $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Sigma$, où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur unitaire normal à Σ en \mathbf{x} [11].

Numériquement, un plan de Poincaré est défini approximativement perpendiculaire au flot ϕ_t . Suivant l'étude réalisée au chapitre précédent, nous choisissons le plan contenant le point fixe central F_- et de coordonnée $x = x_-$. La section est alors constituée par l'ensemble P_x défini par

$$P_x = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_-, \frac{\partial \phi_0(x, y, z)}{\partial x} > 0 \right\} \quad (2.5)$$

La section de Poincaré P_x est très proche d'une courbe : nous sommes alors assuré d'une application de premier retour permettant une caractérisation aisée (cf. Chapitre précédent). L'application de premier retour de l'ensemble P_x à lui-même est représentée figure 2.3. Elle est constituée de deux branches monotones (une croissante et une décroissante) séparées par un point critique y_c définissant une partition de l'attracteur.

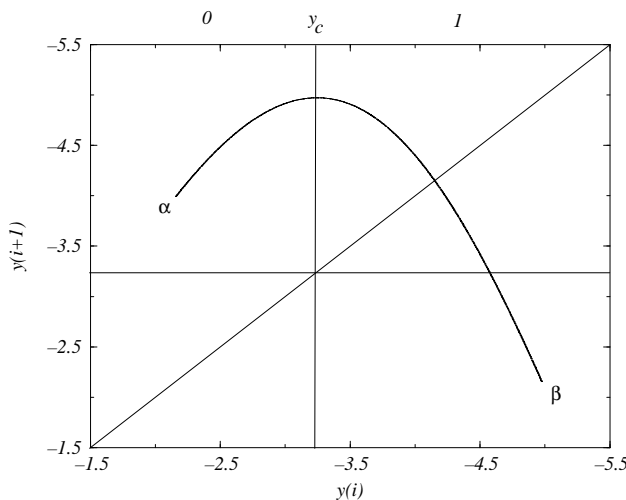


FIG. 2.3 – Application de premier retour du système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.398,2,4)$: 10000 intersections sont utilisées.

Les orbites périodiques sont ensuite extraites selon la méthode proposée par P. Dutertre [12] et codées à l'aide de la dynamique symbolique suivante :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < y < y_c \\ 1 & \text{si } y_c < y < \beta \end{cases} \quad (2.6)$$

où $y_c = -3.16$. La population d'orbites périodiques obtenue par cette méthode est reportée dans le tableau 2.1. Seules les coordonnées en y et z sont données : la coordonnée en x étant toujours égale à x_- (la recherche s'effectue dans la section P_x). Aucune orbite de périodes 3 et 5 n'existe sur cet attracteur. La population d'orbites périodiques ne contient pas toutes celles qui sont prédites par la dynamique symbolique à deux lettres : une

TAB. 2.1 – Population d’orbites périodiques instables de l’attracteur de Rössler commandé par les paramètres $(a, b, c)=(0.398, 2, 4)$: la dynamique symbolique est élaguée.

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence	apparition
1	1	-4.148665907291	0.44743511462048	1	2
2	1	-4.757900179076	0.43840525763401	10	3
3	0				
4	1	-4.867629361328	0.43685912910178	1011	4
5	0				
6	2	-4.893207155971	0.43650196233631	101110	8
		-4.914197837948	0.43620980341205	101111	9
7	2	-4.954528205095	0.43565076704650	1011111	22
		-4.959770874100	0.43557833793546	1011110	23
8	3	-4.880931247623	0.43667325436417	10111010	5
		-4.925799138129	0.43604871078425	10111110	12
		-4.930881101238	0.43597816883070	10111111	13
9	2	-4.943499657450	0.43580335504635	101111111	18
		-4.945708632394	0.43577278795197	101111110	19
10	6	-4.886014660115	0.43660229973155	1011101010	6
		-4.890946767980	0.43653350122251	1011101011	7
		-4.917815058716	0.43615953781556	1011111011	10
		-4.920740433280	0.43611894030591	1011111010	11
		-4.934938607072	0.43592196596709	1011111110	14
		-4.936361786918	0.43590224095316	1011111111	15
11	6	-4.940283891133	0.43584789433782	10111111111	16
		-4.941015503920	0.43583775343167	10111111110	17
		-4.949090890896	0.43572594357792	10111111010	20
		-4.950131608269	0.43571159664825	10111111011	21
		-4.965679272113	0.43549673946805	10111101011	24
		-4.966405948723	0.43548672078189	10111101010	25

telle population est dite *élaguée* [13]. Cette partition est *génératrice* dans la mesure où chaque orbite est codée par une séquence qui lui est propre.

Certaines séquences (telles que 00) ne sont pas présentes dans le tableau 2.1. Cette séquence n’apparaît qu’avec l’orbite de période 3 codée par la séquence symbolique (100) [12]. Rappelons qu’il existe un théorème régissant l’ordre d’apparition des premières orbites d’une période p . Ce théorème est dû à Sarkovskii ([15] et [16]) et s’énonce comme suit :

Théorème 2 *Considérons la séquence de tous les entiers positifs suivants :*

$$\begin{aligned}
 &1 \triangleleft 2 \triangleleft 4 \triangleleft 8 \triangleleft \dots \triangleleft 2^k \triangleleft 2^{k+1} \triangleleft \dots \\
 &\dots \\
 &\dots \triangleleft 2^{k+1}(2l+1) \triangleleft 2^{k+1}(2l-1) \triangleleft \dots \triangleleft 2^{k+1}5 \triangleleft 2^{k+1}3 \triangleleft \dots \\
 &\dots \triangleleft 2^k(2l+1) \triangleleft 2^k(2l-1) \triangleleft \dots \triangleleft 2^k5 \triangleleft 2^k3 \triangleleft \dots \\
 &\dots \\
 &\dots \triangleleft 2(2l+1) \triangleleft 2(2l-1) \triangleleft \dots \triangleleft 2.5 \triangleleft 2.3 \triangleleft \dots \\
 &\dots \triangleleft (2l+1) \triangleleft (2l-1) \triangleleft \dots \triangleleft 5 \triangleleft 3
 \end{aligned}$$

Si une application continue d'un intervalle sur lui-même possède un point de période p , alors cette application a au moins un point de période q vérifiant le classement $q \triangleleft p$.

Ce théorème nous confirme que les périodes 3 et 5 sont les dernières à apparaître (elles sont absentes de la population du ruban simplement plié). Ce théorème, s'il prédit l'ordre d'apparition des orbites par leur période, ne renseigne pas sur les séquences symboliques de ces orbites, ni sur leur ordre d'apparition respectif pour une période donnée. Ceci est réalisé par la théorie de la dynamique symbolique. Cette théorie est basé sur l'ordre naturel

$$0 \prec C \prec 1 \quad (2.7)$$

où le symbole \prec signifie "quelque chose" comme précède et C est le point critique séparant les deux branches monotones. Nous rappelons que la première orbite périodique à apparaître au sein de la cascade de doublements de période est le cycle limite de période 1 codé par la séquence (1). Dans le cas du système de Rössler, l'orbite (0) est en fait associée avec le point fixe central F_- . Elle existe donc toujours : elle est la première à apparaître, avant même la cascade de doublements de période. Toutefois, elle n'est contenue au sein de l'attracteur que pour des vecteurs de l'espace des paramètres très particuliers. Nous en verrons un exemple dans la section suivante. Au sein du système de Rössler, la lettre 0 est associée à la branche monotone croissante qui préserve l'orientation des points périodiques (cf. chapitre 1), et la lettre 1 à la branche monotone décroissante qui inverse l'orientation. De ce fait, une parité peut être introduite : la lettre 0 est paire et la lettre 1 est impaire (deux inversions successives préservent l'ordre des points périodiques). Ainsi, une séquence symbolique W possède une parité. W est paire (impaire) si elle est constituée d'un nombre pair (impair) de 1.

Une orbite périodique est donc décrite par la répétition d'une séquence symbolique (ou mot) W . Lorsqu'une séquence symbolique W sera associée à une orbite périodique, elle sera notée (W) . Chaque orbite de période p peut se décomposer dans une section de Poincaré en p points périodiques. Nous choisissons de coder ces points périodiques par des permutations circulaires W_i (pour $i \in [1, p]$) du mot W . La première lettre est associée au point périodique considéré et les suivantes au futur de ce point sur $(p - 1)$ révolutions.

Par exemple, l'orbite de période 4 codée par la séquence (1011) est représentée par 4 points périodiques codés respectivement par les séquences $1011 \rightarrow 0111 \rightarrow 1110 \rightarrow 1101$. Nous pouvons déterminer l'ordre naturel des mots W_i à l'aide des règles suivantes [17] :

Soient deux séquences symboliques W_1 et W_2 qui ont une partie commune W^* commençant ces deux mots. Les deux séquences W_1 et W_2 s'écrivent ainsi sous la forme :

$$\begin{cases} W_1 = W^* \sigma_1 \sigma_2 \dots \\ W_2 = W^* \tau_1 \tau_2 \dots \end{cases} \quad (2.8)$$

où σ_i et τ_i représentent les lettres respectives des mots W_1 et W_2 . Nous avons évidemment $\sigma_1 \neq \tau_1$. L'ordre naturel de ces deux mots est :

$$\begin{cases} W_1 \prec W_2 & \text{si } W^* \text{ est pair et } \sigma_1 \prec \tau_1 \\ W_2 \prec W_1 & \text{si } W^* \text{ est impair et } \sigma_1 \prec \tau_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Les p points périodiques W_i d'une orbite de période p seront numérotés suivant l'ordre naturel comme suit :

$$W_1 \prec W_2 \prec \dots \prec W_p$$

Pour le système de Rössler, le mot représentant l'orbite périodique sera conventionnellement celui associé au point périodique à l'extrémité extérieure de l'attracteur. Ce choix est guidé par le fait que ce point correspond au premier itéré du point critique lorsque l'orbite apparaît au sein de l'application de premier retour (c'est à dire de l'attracteur). Ce point périodique est celui qui pilote l'apparition de l'orbite sur l'attracteur, car, parmi les points périodiques W_i d'une orbite (W) donnée, il est le dernier suivant l'ordre naturel. Une orbite périodique n'apparaissant que lorsque tous ses points périodiques sont autorisés, l'ordre d'apparition des orbites périodiques se détermine par l'ordre des points W_p au sein de l'ordre naturel.

Le lecteur pourra vérifier que les orbites du tableau 2.1 sont classées par ordre d'apparition pour une période donnée. Ceci peut être vérifié rapidement par consultation de la coordonnées en y (ou en z) : au fur et à mesure

que l'attracteur se développe, la section de Poincaré croît vers les coordonnées négatives ; aussi, classer les orbites périodiques par coordonnées décroissantes revient à les classer par ordre d'apparition sur l'attracteur.

Lorsqu'une augmentation du paramètre a est appliquée, la population d'orbites périodiques va croître jusqu'à rendre la dynamique symbolique complète, c'est à dire que pour une certaine valeur de a toutes les orbites périodiques prédites par la dynamique symbolique binaire seront présentes sur l'attracteur.

2.2.2 Extraction du patron

Les bandes

La partition génératrice (2.6) permet de dégager deux bandes aux caractéristiques bien distinctes. Ces bandes sont mises en évidence par l'intégration de conditions initiales dans la section de Poincaré P_x en respectant la partition (2.6). Elles sont représentées figure 2.4. La bande 0 se développe autour du point fixe central F_- : elle ne subit aucune torsion locale ; elle est associée au développement en spirale des trajectoires. La bande 1 subit l'influence du vortex associé au point fixe extérieur F_+ qui lui impose une torsion locale de $-\pi$: c'est à elle qu'est associé le repliement des trajectoires sur elles-mêmes. Ainsi à chacune de ces bandes correspond un ingrédient bien spécifique de l'action de mélange du chaos : la bande 0 effectue l'étirement et la bande 1 le repliement.

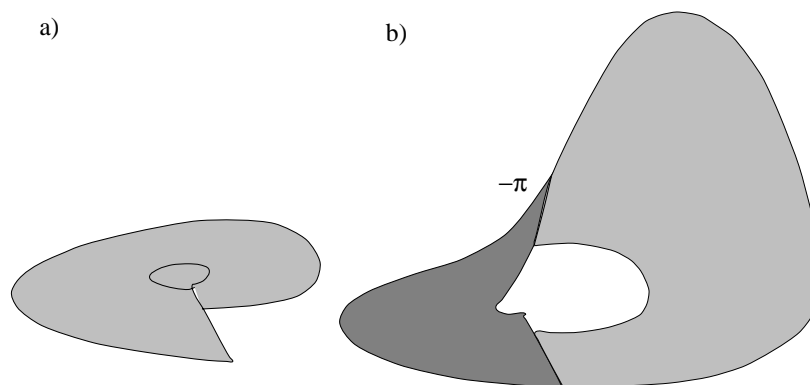


FIG. 2.4 – Décomposition en deux bandes du système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.398,2,4)$: a) la bande 0 associée à l'étirement et b) la bande 1 au repliement. La rotation imposée à la bande 1 est mise en évidence par la distinction de ses deux faces par des gris différents.

Etant donné que chaque bande définit le domaine d'une lettre de la dynamique symbolique, une et une seule orbite de période 1 est contenue dans chaque bande. Notons que l'orbite périodique (0) n'existe pas physiquement au sein de l'attracteur : en effet, la bande 0 développant les trajectoires en spirale autour du point fixe F_- , l'orbite (0) ne peut être présente qu'au niveau du point fixe F_- lui-même (aucune autre récurrence n'est possible sur une spirale divergente). Le ruban simplement plié, parce qu'il ne s'étend pas jusqu'au point fixe central F_- , ne peut donc contenir l'orbite (0). Par contre, l'orbite périodique (1) est toujours présente car elle est la première orbite périodique à apparaître : elle est issue du cycle limite originel de la cascade de doublements de période (voir chapitre 1). Sur la figure 2.4 aucune liaison n'apparaît entre les deux bandes. Nous avons maintenant tous les éléments pour dresser le patron.

La matrice du patron

Une projection sur le plan xy du ruban simplement plié (fig. 2.5.a) permet une construction directe du patron (fig. 2.5.b). Ce patron n'est pas en accord avec la convention standard d'insertion proposée par P. Melvin et N. B. Tuffillaro [18]. En effet, les bandes sont collées du dessous vers le dessus et de la droite vers la gauche alors qu'elles devraient être collées du dessous vers le dessus et de la gauche vers la droite. De manière à obtenir un

patron équivalent respectant la convention standard d'insertion, une permutation entre les bandes 0 et 1 est introduite (fig. 2.5.c) [18].

La convention standard d'insertion introduite, le patron, représentation synthétique d'un attracteur étrange, se définit par une matrice carrée $n \times n$ où n est le nombre de branches monotones de l'application de premier retour. Les éléments diagonaux $M(i, i)$ représentent la torsion locale de chaque bande (ou de manière équivalente la torsion de l'espace tangent autour de l'orbite de période 1 associée à la bande considérée); les éléments non-diagonaux $M(i, j)$ sont définis comme étant égaux à la somme des intersections orientées entre la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ bande [18]. Du point de vue algébrique, les bandes sont ordonnées suivant l'ordre naturel, soit $0 \rightarrow 1$.

Dans le cas du ruban simplement plié de Rössler, la matrice M_{Ros_2} associée au patron est de la forme :

$$M_{Ros_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Sur la figure 2.5 nous avons pris la convention d'ordonner les bandes du centre vers l'extérieur de l'attracteur. Comme c'est le cas sur le portrait de phase. Parce que le graphe de ruban a été placé sur la partie gauche du patron (pour une meilleure comparaison entre le patron et l'attracteur), l'ordre des bandes se trouve inversé sur celui-ci : cette représentation n'est pas en contradiction avec les conventions algébriques choisies.

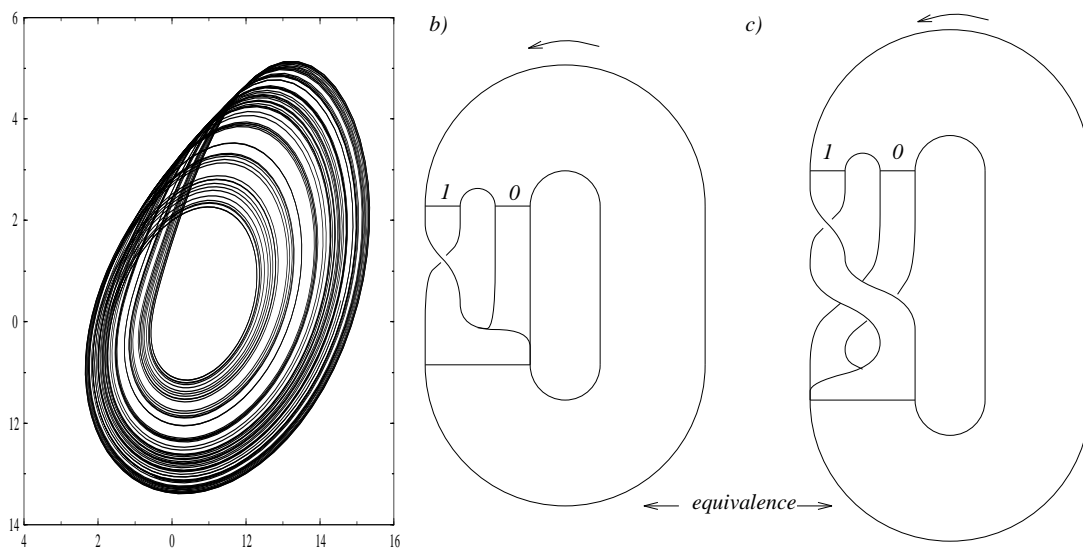


FIG. 2.5 – a) Projection sur le plan xy du ruban simplement plié. b) Patron obtenu directement à partir de la projection : la convention d'insertion est différente de la convention standard. c) Patron équivalent au précédent respectant la convention standard d'insertion.

Le patron est alors vérifié par comparaison des nombres de liaisons prédits par construction des orbites sur le patron à ceux comptés sur une projection des orbites périodiques. Auparavant nous développerons une relation algébrique générale permettant d'extraire les nombres de liaisons à partir de la dynamique symbolique et de la matrice du patron.

Nombres de liaisons

La connaissance du nombre de liaisons des orbites est requise pour la vérification complète du patron. Rappelons que ce nombre $L(N_i, N_j)$ est égal à la demi-somme des intersections orientées des orbites N_i et N_j sur une projection plane [19]. Le nombre de liaisons peut être obtenu directement à partir de la dynamique symbolique et de la matrice du patron. Pour cela, nous allons extraire les différentes contributions du graphe de ruban aux nombres de liaisons.

Soient deux orbites quelconques N_1 et N_2 de période respective p_1 et p_2 . Les séquences symboliques de ces orbites sont respectivement $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p_1})$ et $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{p_2})$ où les σ_i et les τ_j

représentent les lettres de la dynamique symbolique. Soient deux bandes B_k et B_l associées respectivement à deux lettres k et l de la dynamique symbolique. Chaque bande a une torsion locale respectivement égale à $M(k, k)$ et $M(l, l)$ et elles présentent $M(k, l)$ intersections sur une projection plane du graphe de ruban.

Le nombre de liaison $L(N_1, N_2)$ est la demi-somme des intersections orientées issues de trois contributions respectivement dues aux torsions locales des bandes, aux intersections orientées des bandes et aux intersections des trajectoires liées au repliement au niveau du graphe d'insertion :

- **Torsion locale** : Supposons qu'il existe un entier $i \in [1, p_1]$ et un entier $j \in [1, p_2]$ tels que $\sigma_i = \tau_j = k$, alors les orbites N_1 et N_2 présentent $M(k, k)$ croisements dus au couple (σ_i, τ_j) sur une projection plane de la bande B_k .
- **Croisement des bandes** : Supposons qu'il existe un entier $i \in [1, p_1]$ et un entier $j \in [1, p_2]$ tels que $\sigma_i = k$ et $\tau_j = l$. Par conséquent, lorsque les orbites N_1 et N_2 traversent respectivement les bandes B_k et B_l , elles présentent $M(k, l)$ croisements associés au couple (σ_i, τ_j) sur une projection plane du graphe de ruban (graphe d'insertion exclu).
- **Graphe d'insertion** : Les intersections orientées entre les deux orbites N_1 et N_2 au niveau du graphe d'insertion peuvent être dénombrées à l'aide de la construction d'une tresse d'insertion. Pour cela, la localisation relative des points périodiques associés respectivement aux orbites N_1 et N_2 doit être réalisée : à chaque point périodique des orbites N_1 et N_2 nous pouvons associer une séquence symbolique respective équivalente par permutation circulaire à la séquence $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p_1})$ et $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{p_2})$. Ainsi au $i^{\text{ème}}$ point périodique de l'orbite N_1 correspond la séquence $(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$. Les points périodiques sont alors classés suivant l'ordre naturel à l'aide de leur séquence symbolique respective. La connaissance de l'ordre naturel permet la construction de la base inférieure de la tresse. La base supérieure est réarrangée de manière à tenir compte des inversions dues aux torsions locales et aux intersections des bandes. Deux règles sont alors dégagées [20] :

Règle 1 : Si $M(k, k)$ est impair alors tous les points périodiques $(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$ et $(\tau_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_{p_2}, \tau_1, \dots, \tau_{j-1})$ tels que $\sigma_i = \tau_j = k$ sont réécrits sur la base supérieure dans l'ordre inverse de celui de la base inférieure.

Cette règle traduit l'inversion de l'ordre relatif des points périodiques au sein d'une bande de torsion locale impaire (figure 2.6.a).

Règle 2 : Soient la suite S_k constituée des points périodiques $(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$ et $(\tau_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_{p_2}, \tau_1, \dots, \tau_{j-1})$ tels que $\sigma_i = k$ et $\tau_j = k$ respectivement pour $i \in [1, p_1]$ et $j \in [1, p_2]$ et la suite S_l constituée des points périodiques $(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$ et $(\tau_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_{p_2}, \tau_1, \dots, \tau_{j-1})$ tels que $\sigma_i = l$ et $\tau_j = l$ respectivement pour $i \in [1, p_1]$ et $j \in [1, p_2]$ avec $k \neq l$. Si la somme des intersections orientées $M(k, l)$ entre les bandes B_k et B_l est impaire alors les suites S_k et S_l sont permutées lors de la réécriture sur la base supérieure.

Cette seconde règle traduit la permutation en bloc de l'ordre relatif des points périodiques appartenant à deux bandes dont la somme des intersections orientées est impaire.

La tresse est alors achevée en reliant respectivement les points périodiques $(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$ et $(\tau_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_{p_2}, \tau_1, \dots, \tau_{j-1})$ aux points $(\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_i)$ et $(\tau_{j+1}, \tau_{j+2}, \dots, \tau_{p_2}, \tau_1, \dots, \tau_j)$. Le nombre N_{ins} d'intersections orientées au sein du graphe d'insertion est alors obtenu par comptage des intersections sur la tresse ainsi obtenue. Précisons que la convention standard d'insertion implique au nombre N_{ins} d'être toujours positif : en effet, tous les croisements sont positifs au niveau du graphe d'insertion. Le nombre de liaisons est alors de la forme :

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} M(\sigma_i, \tau_j) + N_{ins}(N_1, N_2) \right] \quad (2.11)$$

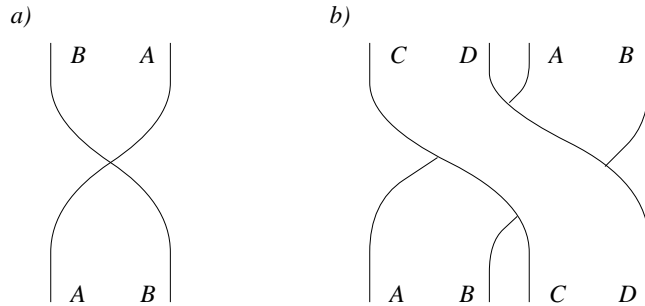


FIG. 2.6 – Illustration des deux règles de construction de la tresse d'insertion. a) Première règle : inversion de l'ordre relatif des points périodiques au sein d'une bande de torsion locale impaire. b) Seconde règle : permutation en bloc des points périodiques appartenant à deux bandes dont la somme des intersections orientées est impaire.

Cette relation peut être vérifiée sur les orbites (1011) et (1) du ruban simplement plié. Le nombre de liaisons $L(1011, 1)$ prédit par la relation (2.11) est égal à :

$$\begin{aligned} L(1011, 1) &= \frac{1}{2} [3M(1, 1) + M(1, 0) + N_{ins}(1011, 1)] \\ &= \frac{1}{2} [-3 \quad -1 \quad +0] = -2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $N_{ins}(1011, 1) = 0$ est obtenu grâce à la localisation des différents points périodiques en jeu (il peut être vérifié sur le graphe d'insertion du patron qui ne présente aucune intersection entre les orbites (1011) et (1) (fig. 2.7)). Ce nombre de liaisons est retrouvé sur une projection dans le plan xy des orbites (1011) et (1) (la détermination du signe du croisement se fait par inspection de la troisième coordonnée). La relation a été vérifiée sur un grand nombre d'orbites périodiques [20].

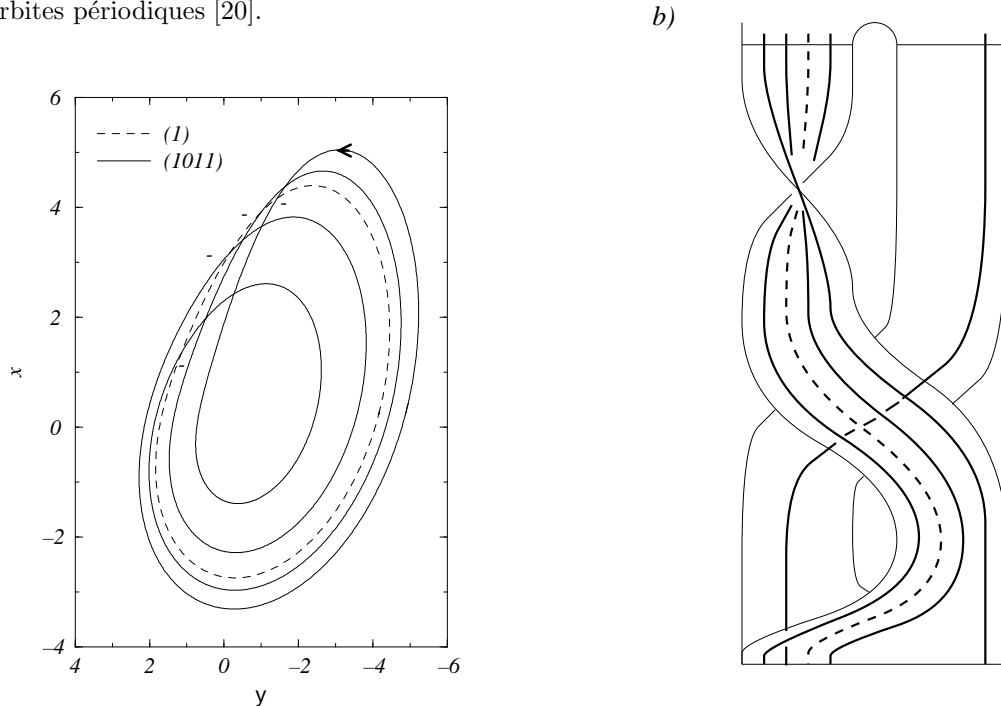


FIG. 2.7 – a) Projection des orbites (1011) et (1) et b) leur construction sur le patron : $L(1011, 1) = \frac{1}{2}(-4) = -2$.

Dire que le nombre de liaisons $L(1011, 1)$ est égal à -2 signifie que l'orbite périodique (1011) est liée deux fois à l'orbite (1), c'est à dire que l'orbite (1011) fait deux tours autour de l'orbite (1) (fig. 2.8).

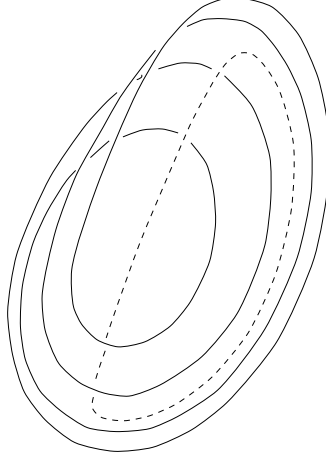


FIG. 2.8 – Orbite (1011) et (1) deux fois liées

Nombre de auto-liaisons

Il a été vu au chapitre précédent que le nombre de auto-liaisons d'une orbite périodique est associé au nombre de demi-tours orientés de l'espace tangent autour de cette orbite. L'unique orbite de période 1 contenue dans une bande donnée possède un espace tangent qui, par continuité, présente un nombre de torsions locales égal à celui de la bande qui le contient. Aussi, le nombre de auto-liaisons des orbites de période 1 peut être directement déterminé à partir des bandes auxquelles elles sont associées. Ceci s'avère très pratique dans la mesure où l'orbite périodique (0) est rarement présente sur l'attracteur (voir Section 2.3).

Sinon, le nombre de auto-liaisons peut être prédit directement à partir de la dynamique symbolique lorsque la matrice du patron est connue à l'aide de la relation (2.11). Ainsi cette relation devient dans le cas d'une auto-liaison :

$$L(N_1, N_1) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_1} M(\sigma_i, \sigma_j) + N_{ins}(N_1, N_1) \right] \quad (2.13)$$

où $N_{ins}(N_1, N_1) = 2N_{ins}(N_1)$, le nombre $N_{ins}(N_1)$ étant défini comme la somme des intersections au niveau du graphe d'insertion de l'orbite N_1 avec elle-même (ce nombre s'obtient suivant les mêmes règles que pour $N_{ins}(N_1, N_2)$ lorsque $N_1 \neq N_2$).

À titre d'application, ceci peut être vérifié sur l'orbite (1011). Suivant la relation (2.13), le nombre de auto-liaisons $L(1011, 1011)$ est égal à :

$$\begin{aligned} L(1011, 1011) &= \frac{1}{2} [9M(1, 1) + 6M(1, 0) + M(0, 0) + N_{ins}(1011, 1011)] \\ &= \frac{1}{2} [-9 - 6 + 0 + 2] = -\frac{13}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ce nombre est vérifié sur une projection dans le plan xy par dénombrement des intersections orientées entre cette orbite et une trajectoire voisine qui simule son espace tangent (fig. 2.9).

Cette relation a été vérifiée sur un grand nombre d'orbites périodiques codées sur des dynamiques symboliques jusqu'à six lettres [20].

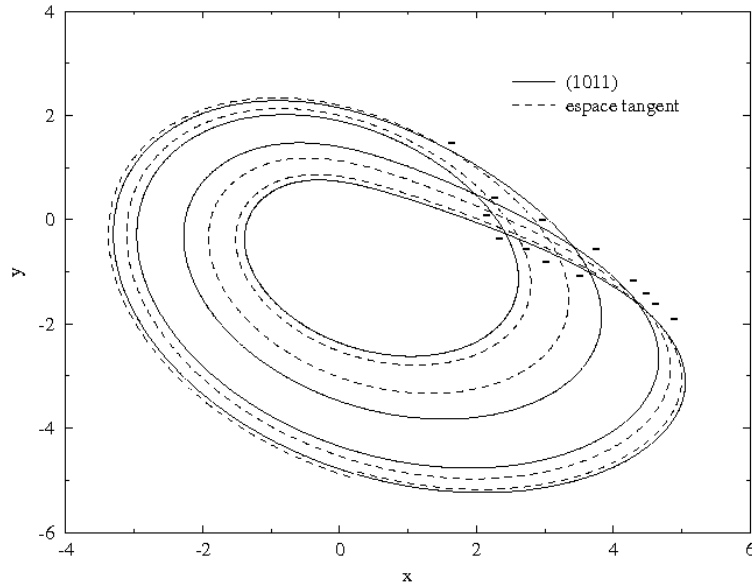


FIG. 2.9 – Orbite (1011) et une trajectoire simulant son espace tangent : la demi-somme des intersection orientées est égale à $-13/2$.

2.3 Dynamique symbolique complète

Lorsque la dynamique symbolique est complète, le système de Rössler offre la particularité de présenter une trajectoire homocline, c'est à dire une trajectoire qui quitte le point fixe par sa direction instable et y revient par sa direction stable. Nous allons mettre en évidence le rôle particulier que joue cette orbite périodique dans le processus de création des orbites périodiques.

2.3.1 Population d'orbites périodiques

Pour les paramètres de contrôle $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$ la dynamique symbolique binaire est dite complète [13], c'est à dire qu'à toute séquence symbolique prédite est associée une orbite périodique physique sur l'attracteur. L'application de premier retour est alors symétrique (fig. 2.10) et la branche croissante jouxte la première bissectrice. L'orbite périodique de séquence (0) est alors présente sur l'attracteur : précisons que suivant l'ordre d'apparition prédit par la dynamique symbolique, l'orbite (0) est la première apparaître. Elle peut aussi être vue comme une suite infinie de 0. Elle ne devient partie intégrante de l'attracteur qu'après l'apparition de la séquence infinie

$$S_\infty = 10^\infty$$

Cette trajectoire de période infinie est une trajectoire homocline ([21], [22] et [23]), c'est à dire qu'elle correspond à une trajectoire s'éloignant en spirale du point fixe central F_- par sa variété instable et y revenant par sa variété stable (fig. 2.11). L'orbite périodique (0) est en fait confondue avec le point fixe central.

Suivant l'application de premier retour (2.10), la partition génératrice de l'attracteur est définie par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } y < y_c \\ 1 & \text{si } y > y_c \end{cases} \quad (2.15)$$

où $y_c \approx 3.04$.

La population d'orbites périodiques est alors extraite de l'attracteur par la méthode de P. Dutertre [12] et est codée à l'aide de la dynamique symbolique. Pour cette valeur de l'espace des paramètres, la population d'orbites périodiques instables est complète (tableau 2.2).

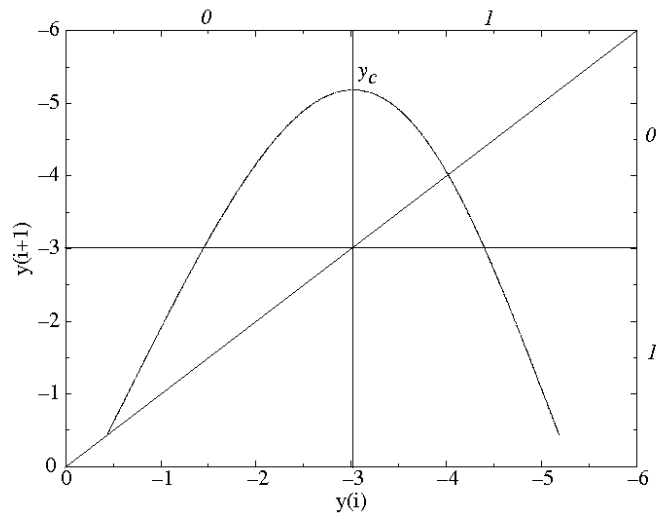


FIG. 2.10 – Application de premier retour de la section de Poincaré P_x à elle-même : la branche monotone croissante jouxte la première bissectrice attestant la présence de l’orbite périodique codée par la séquence (0).

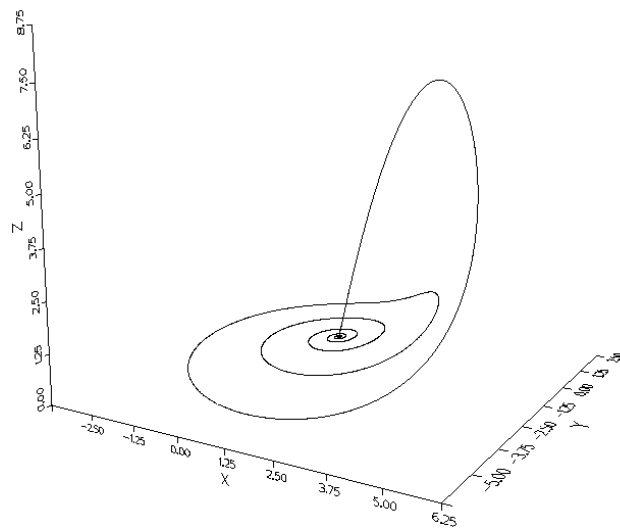


FIG. 2.11 – Exemple de trajectoire homocline : orbite (1000000) de période 7 quittant le voisinage du point fixe central F_- par sa variété instable et y revenant par sa variété stable. Numériquement, cette orbite de période 7 est très peu distincte de l’orbite homocline de période infinie décrite par la séquence symbolique infinie (10^∞) .

TAB. 2.2 – Population d’orbites périodiques instables de l’attracteur de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.43295,2,4)$: la dynamique symbolique est complète.

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence
1	2	-0.530456290000	0.53045629000000	0
		-4.115757705900	0.45006024262049	1
2	1	-4.731571342125	0.44081046289203	10
3	2	-4.908805650988	0.43829295983967	101
		-5.042458337013	0.43643380310328	100
4	3	-4.819662437324	0.43955162580879	1011
		-5.152125820199	0.43493266786728	1001
		-5.183231937739	0.43451073749300	1000
5	6	-4.855746771271	0.43904028354789	10111
		-4.888468772754	0.43857877608183	10110
		-5.080612881325	0.43590910561455	10010
		-5.100736927040	0.43563340657720	10011
		-5.235721022898	0.43380268888431	10001
		-5.243108090066	0.43370346505366	10000
6	9	-4.824215349211	0.43948695704115	101110
		-4.839555141632	0.43926944450310	101111
		-5.055375761491	0.43625588155301	100101
		-5.122468398361	0.43533650258864	100111
		-5.130050431629	0.43523310671299	100110
		-5.207375386600	0.43418447195665	100010
		-5.212117377374	0.43412053730209	100011
		-5.265873481291	0.43339810322327	100001
		-5.267648063678	0.43337439261392	100000
7	18	-4.846513685816	0.43917088976719	1011111
		-4.852986948175	0.43907933011027	1011110
		-4.892481191915	0.43852230082008	1011010
		-4.899533634423	0.43842315405139	1011011
		-5.066612619247	0.43610133082427	1001011
		-5.071463450907	0.43603469441947	1001010
		-5.109337358348	0.43551580292575	1001110
		-5.112872443963	0.43546746581787	1001111
		-5.141423476725	0.43507821416674	1001101
		-5.145385385567	0.43502430470592	1001100
		-5.192206424594	0.43438937673591	1000100
		-5.195240060406	0.43434836952540	1000101
		-5.222349452332	0.43398262242142	1000111
		-5.224145003227	0.43395847132515	1000110
		-5.254756051727	0.43354710657729	1000010
		-5.255888718979	0.43353189630283	1000011
		-5.277064157756	0.43324840145249	1000001
		-5.277498154345	0.43324257578467	1000000

2.3.2 Les travaux de Sil'nikov

Au sein du tableau 2.2, nous pouvons remarquer des séquences de la forme (10^n) . Les orbites de période relativement élevée qui sont associées à ces séquences ont une configuration très particulière dans l'espace des phases : elles quittent le voisinage du point fixe F_- par sa variété instable et y retournent par sa variété stable. Ce sont les orbites *homoclines*. Henri Poincaré qualifie les objets homoclines comme étant doublement asymptotiques, c'est à dire que la propriété de convergence asymptotique est vérifiée à la fois dans le passé et dans le futur. De telles orbites jouent un rôle important dans les systèmes chimiques [25].

Les travaux de L. P. Sil'nikov [26] fournissent un support théorique à l'étude des objets homoclines. L. P. Sil'nikov détermine les conditions d'existence d'une telle trajectoire. Ainsi, dans un espace tridimensionnel, deux types d'orbites homoclines peuvent exister suivant la dimension des variétés invariantes du point selle. Lorsque la variété stable W_s est unidimensionnelle la variété instable W_u est bidimensionnelle et *vice-versa*. La figure 2.12 représente ces deux types d'orbites homoclines, pour lesquelles les valeurs propres du point selle sont :

$$\begin{cases} (-\lambda, \rho \pm i\omega) & \text{pour } \Gamma_0^- \\ (\lambda, -\rho \pm i\omega) & \text{pour } \Gamma_0^+ \end{cases} \quad (2.16)$$

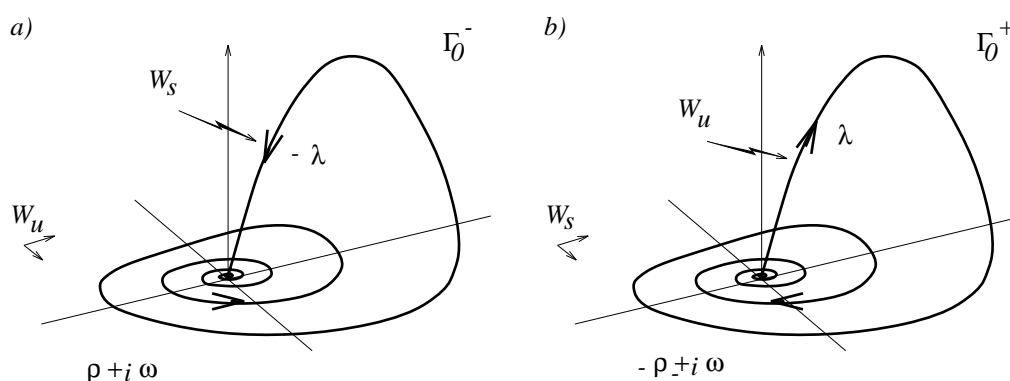


FIG. 2.12 – Orbites homoclines biasymptotiques à un point selle dans un espace tridimensionnel : a) Γ_0^- décrit une spirale divergente alors que b) Γ_0^+ décrit une spirale convergente (λ et $\rho > 0$).

Dans le cas de l'orbite Γ_0^- , la trajectoire homocline quitte le point selle par une spirale plane divergente et est réinjectée au voisinage du point selle par la variété stable. Pour une orbite Γ_0^+ , la trajectoire quitte le point selle par la direction instable et y retourne par une spirale plane convergente.

L. P. Sil'nikov propose le théorème suivant :

Théorème 3 Lorsque $\delta = \frac{\rho}{\lambda} < 1$, alors chaque voisinage de Γ_0 contient un ensemble dénombrable de solutions périodiques instables du type hyperbolique.

Nous allons maintenant étudier la population d'orbites périodiques instables au voisinage de la trajectoire homocline Γ_0 .

2.3.3 Trajectoire homocline

Le système de Rössler se construit autour du point fixe central F_- de coordonnées (x_-, y_-, z_-) . L'étude de la stabilité de ce point se réalise par l'intermédiaire d'une linéarisation du champ de vecteur en son voisinage. Le jacobien J_{F_-} est alors :

$$J_{F_-} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_- & 0 & x_- - c \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Les valeurs propres sont données par les racines du polynôme caractéristique :

$$-\lambda^3 + (a + x_- - c)\lambda^2 + (ac - ax_- - 1 - z_-)\lambda + x_- - c + az_- = 0 \quad (2.18)$$

A l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, les racines sont extraites et ont pour valeurs numériques :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = -3.6336063 \\ \lambda_{2,3} & = 0.1481087 \pm i 0.975955 \end{cases} \quad (2.19)$$

lorsque $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$. L'orbite homocline est donc du type Γ_0^- . Le rapport δ est inférieur à 1. La valeur du paramètre de contrôle $a_h \approx 0.43295$ correspond à l'existence d'une orbite homocline de période infinie. En effet, suivant la dynamique symbolique, la dernière orbite à apparaître est l'orbite homocline Γ_0 de séquence symbolique infinie (10^n) . L'apparition de cette orbite de période infinie coïncide avec l'incorporation du point fixe F_- au sein de l'attracteur. La valeur a_h , associée à cet événement, correspond donc à la valeur du paramètre a où la branche monotone croissante de l'application de premier retour jouxte la bissectrice.

Lorsque le paramètre de contrôle a est au voisinage de a_h , mais différent de a_h , la population d'orbites périodiques est finie [23]. Par contre, lorsque $a = a_h$ il existe une infinité dénombrable d'orbites périodiques. L'orbite homocline Γ_0^- de période infinie qui existe alors est appelée orbite homocline principale [23]. L'attracteur contient alors toutes les orbites périodiques issues de chaque séquence infinie de doublement de période d'une orbite du type (10^n) .

D'après une étude numérique, nous schématisons le diagramme de bifurcation des orbites périodiques apparaissant suivant une variation de a précédant la valeur a_h . Auparavant quelques résultats issus de la théorie de la dynamique symbolique doivent être rappelés. L'ordre d'apparition des orbites périodiques est obtenu suivant le protocole développé section 2.2.1 et est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned} &(101) \\ &(100) \\ &(100 101) \\ &(100 101 100 100) \\ &\vdots \\ &(1001) \\ &(1000) \\ &(1000 1001) \\ &(1000 1001 1000 1000) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Chacun pourra vérifier à l'aide de l'ordre naturel qu'aucune orbite périodique n'apparaît entre les orbites citées.

Pour la valeur a_h , rappelons que la dernière orbite apparue sur l'attracteur est codée par la séquence (0) . Elle suit l'orbite homocline principale Γ_0^- codée par la séquence (10^n) . La dynamique symbolique binaire est alors complète.

Lorsque a excède a_h , la création d'une nouvelle orbite périodique ne peut se réaliser qu'avec l'apparition d'une nouvelle lettre, c'est à dire l'apparition d'une nouvelle branche monotone sur l'application de premier retour, codée par la lettre 2. L'ordre naturel peut s'écrire sous la forme

$$F_- \prec 0 \prec C_1 \prec 1 \prec C_2 \prec 2$$

où C_1 et C_2 sont les deux points critiques de l'application de premier retour à trois branches monotones (voir section suivante) et F_- le point fixe intérieur. Le point fixe est introduit dans cet ordre naturel uniquement

pour clarifier ce qui suit. P. Glendinning et C. Sparrow [23] montrent qu'un élagage des orbites périodiques est provoqué par la disparition de l'orbite Γ_0^- lorsque a excède a_h . Alors que la création des orbites périodiques se fait par la branche monotone décroissante, c'est à dire par l'extérieur de l'attracteur, l'élagage se réalise par le voisinage du point selle F_- . Ainsi de manière à prédire l'ordre de l'élagage à l'aide de la dynamique symbolique nous devons maintenant considérer la séquence associée au point périodique le plus proche du point selle F_- . Ainsi la vie d'une orbite périodique donnée est liée à la position, dans l'ordre naturel, de son point périodique le plus proche du point fixe F_- . L'ordre d'élagage sous une augmentation du paramètre de contrôle a sera ainsi prédit par l'ordre naturel des points périodiques codés sur les séquences symboliques telles que si nous appelons W_i les p séquences symboliques d'une orbite de période p telle que

$$W_1 \prec W_2 \prec \dots \prec W_{p-1} \prec W_p,$$

seule la séquence W_1 sera retenue dans l'ordre naturel (au lieu de W_p pour l'ordre d'apparition). Nous obtenons alors l'ordre d'élagage suivant :

(1000...0000)
 ∴
 (1000 1001 1000 1000)
 (1000 1001)
 (1000)
 (2000)
 ∴
 (2001 2000 2001 2001)
 (2001 2000)
 (2001)
 (1001)
 ∴
 (100 101 100 100)
 (100 101)
 (100)
 (200)
 ∴
 (200 201 200 200)
 (200 201)
 (101)
 (201)

Nous pouvons résumer le processus sur un diagramme de bifurcation (fig. 2.13).

Les orbites de période p du type (10^{p-1}) apparaissent par une bifurcation nœud-col. Appelons a_i la valeur du paramètre de contrôle correspondant. Chaque paire est constituée d'une orbite de période p de parité paire (nombre pair de 1), instable, codée par la séquence $(10^{p-2}1)$ et une orbite de période p de parité impaire, stable, codée par la séquence (10^{p-1}) . L'orbite stable va donner naissance à une cascade de doublements de période : celle est toujours impaire car nous avons vu au chapitre 1 que seuls des cycles limites impairs pouvaient donner naissance à un doublement de période.

A l'issue de cette cascade infinie, d'autres orbites périodiques vont apparaître jusqu'à une nouvelle bifurcation nœud-col donnant naissance à une nouvelle paire du type $(10^n) - (10^{n-1}1)$. Appelons a_{i+1} le paramètre de contrôle associé à cette nouvelle bifurcation. P. Gaspard, R. Kapral et G. Nicolis [22] montrent que ces bifurcations apparaissent suivant la loi d'échelle suivante :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_i - \mu_{i-1}} = -e^{-\left(\frac{\pi\rho}{\omega}\right)} \tag{2.20}$$

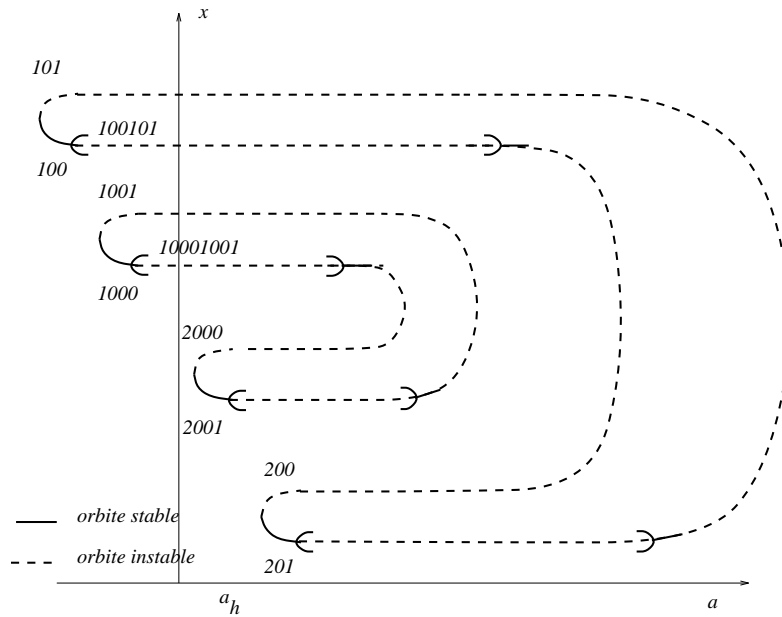


FIG. 2.13 – Diagramme de bifurcation au voisinage de l'orbite homocline principale Γ_0^- . Seules quelques orbites de faibles périodes ont été représentées par souci de simplicité.

où $\mu_i = |a_i - a_h|$. Cette loi d'échelle n'a pu être vérifiée numériquement car les périodes des orbites en jeu sont trop importantes.

Au delà de la valeur a_h , des cascades de doublements de période inverses surviennent pour des valeurs a_j . Elles aussi vérifient la loi d'échelle (2.20). A l'issue de ces cascades inverses, les orbites périodiques de séquence symbolique de la forme (10^n) et $(10^{n-1}1)$ disparaissent par une bifurcation nœud-col inverse avec les orbites périodiques respectivement de la forme (20^n) et $(20^{n-1}1)$ et non par une bifurcation nœud-col inverse d'une paire d'orbites constituée d'une orbite de période p de séquence (10^n) et d'une orbite de période $p+1$ de séquence $(10^{n-1}1)$ comme l'avait proposé R. Gaspard *et al* [22].

L'orbite homocline principale induit une série de cascade de doublements de période inverse achevée par une bifurcation nœud-col. Elle pilote donc le processus d'élagage par sa disparition lorsque $a > a_h$. Dans le cas du système de Rössler, elle est la signature d'une transition d'une dynamique symbolique binaire à une dynamique ternaire.

2.4 Au delà du point de saturation

2.4.1 A trois lettres

Une fois l'orbite homocline apparue, la dynamique symbolique est complète. Le chaos ne peut alors se développer que par la création d'une nouvelle lettre, c'est à dire par l'apparition d'un nouveau comportement dynamique. La population d'orbites périodiques instables sera extraite pour les paramètres $(a, b, c) = (0.492, 2, 4)$. Cette valeur est voisine de la valeur critique à partir de laquelle l'attracteur possède quatre bandes. La nouvelle bande représentative sera caractérisée et le patron dressé.

Population d'orbites périodiques

Au delà du point de saturation de la dynamique à deux lettres, une troisième branche monotone apparaît sur l'application de premier retour de la section de Poincaré P_x à elle-même (fig. 2.14) : celle-ci est croissante. La partition génératrice du ruban comporte donc une troisième bande qui est paire. Elle est définie par :

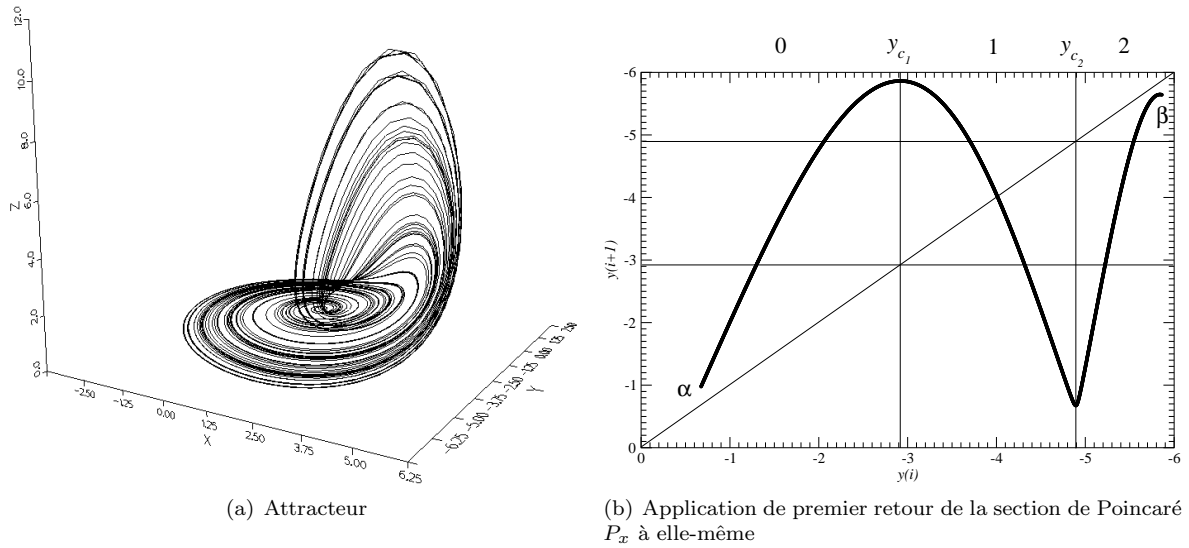


FIG. 2.14 – Attracteur solution du système de Rössler commandé par les paramètres $(a, b, c) = (0.492, 2, 4)$.

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < y < y_{c_1} \\ 1 & \text{si } y_{c_1} < y < y_{c_2} \\ 2 & \text{si } y_{c_2} < y < \beta \end{cases} \quad (2.21)$$

où

$$\begin{cases} y_{c_1} = -2.92 \\ y_{c_2} = -4.89 \end{cases} \quad (2.22)$$

La population d'orbites périodiques est toujours extraite à l'aide de la méthode proposée par P. Dutertre [12] et est reportée dans le tableau (2.3) où les séquences symboliques sont proposées.

Pour les paramètres de contrôle $(a, b, c) = (0.492, 2, 4)$, la dynamique symbolique ternaire n'est pas complète. Les orbites (22211), (22210), (22220) et (22221) ne sont pas encore apparues. Elles n'apparaîtront qu'après la création de la quatrième lettre [12]. Notons que pour les périodes 2, 3 et 4 la population est complète, c'est à dire que toutes les séquences prédites par la dynamique symbolique se retrouvent sur l'attracteur. Le processus d'élagage a déjà débuté : les orbites (10001), (10000), (20000) et (20001) ont déjà disparu. L'annihilation des orbites au voisinage de l'orbite homocline (c'est à dire possédant des points périodiques au voisinage du point fixe central F_-) se traduit par l'absence de séquences, telles que (0000), au sein d'une orbite. Cet élagage du squelette d'orbites périodiques implique à nouveau une zone lacunaire autour du point fixe F_- non visitée par les trajectoires chaotiques.

TAB. 2.3 – Population d’orbites périodiques de l’attracteur de Rössler commandé par les paramètres $(a, b, c) = (0.492, 2, 4)$: la population est élaguée.

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence
1	1	-4.0117019765001	0.45539900158089	1
2	3	-4.5721869656374	0.44668333882304	10
		-5.1202726173667	0.43880064316377	20
		-5.3076865471423	0.43623453135495	21
3	8	-4.6467612270061	0.44557575789343	101
		-4.7936704368079	0.44342699125051	100
		-4.9642568758760	0.44098540655194	200
		-5.0360480626431	0.43997444498392	201
		-5.4110114754548	0.43484605626741	211
		-5.4595057524115	0.43420060623947	210
		-5.6067148715014	0.43226528982622	220
		-5.6372853090585	0.43186780633075	221
4	18	-4.6216986939746	0.44594670238272	1011
		-4.8279965761054	0.44293115186552	1001
		-4.8812527655493	0.44216642136703	1000
		-4.9045824154906	0.44183315358079	2000
		-4.9392721366682	0.44133948853268	2001
		-5.0603330595990	0.43963466088484	2011
		-5.0815950687463	0.43933805464949	2010
		-5.3204617171669	0.43606188361697	2120
		-5.3606813036743	0.43552007647782	2110
		-5.3765959044265	0.43530646492584	2111
		-5.5011934481495	0.43364894218869	2101
		-5.5168359480555	0.43344267901534	2100
		-5.5630930426429	0.43283508061690	2200
		-5.5724157312014	0.43271300107814	2201
		-5.6832030001442	0.43127355875274	2211
-5.6946147987682	0.43112643108891	2210		
-5.7816845691633	0.43001038482128	2220		
-5.7992602294827	0.42978652815349	2221		

Table 2.3 : suite

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence
5	40	-4.6291996059170	0.4458353888851	10111
		-4.6440831883800	0.44561529509816	10110
		-4.8023619308170	0.44330124476918	10010
		-4.8169718989210	0.44309017026895	10011
		-4.9470213245243	0.44122954141580	20011
		-4.9550402444574	0.44111591755016	20010
		-5.0460605808110	0.43983425981244	20110
		-5.0527016720257	0.43974132654469	20111
		-5.0903538039955	0.43921614188762	20101
		-5.0976234896264	0.43911503420342	20100
		-5.1096309057769	0.43894822130063	20200
		-5.1141778840011	0.43888515653664	20201
		-5.3277195055278	0.43596388751408	21201
		-5.3313566045179	0.43591485197339	21200
		-5.3438657618678	0.43574628705149	21100
		-5.3495091532751	0.43567032986947	21101
		-5.3869142648270	0.43516824730190	21111
		-5.3917245387557	0.43510380022675	21110
		-5.4044835823721	0.43493323303087	21120
		-5.4081194251080	0.43488464778080	21121
		-5.4642740267939	0.43413735526838	21021
		-5.4680018588782	0.43408796139807	21020
		-5.4827945830816	0.43389205191588	21010
		-5.4876970720319	0.43382724278537	21011
		-5.5324717854997	0.43323689000637	21001
		-5.5383256648329	0.43315993296973	21000
		-5.5487625079010	0.43302293896747	22000
		-5.5526523912726	0.43297191909062	22001
		-5.5823881193367	0.43258266258153	22011
		-5.5853384891123	0.43254411177338	22010
		-5.5966006594247	0.43239709187883	22020
		-5.5988776457620	0.43236740027882	22021
		-5.6472663620936	0.43173835912678	22121
		-5.6496513718699	0.43170741639222	22120
		-5.6639932350978	0.43152178018774	22110
		-5.6672541183080	0.43147956552984	22111
		-5.7166258494751	0.43084318247567	22101
		-5.7211260369907	0.43078532964831	22100
		-5.7473740788350	0.43044868864551	22200
		-5.7507820875247	0.43040511905444	22201

Extraction du patron

Rappelons que les nombres de liaisons sont des invariants topologiques, c'est à dire qu'ils respectent la loi suivante [19] :

Loi 2.1 : Soient deux orbites périodiques N_1 et N_2 . Le nombre de liaisons $L(N_1, N_2)$ se conserve tant qu'il n'existe aucune bifurcation impliquant à la fois l'orbite N_1 et l'orbite N_2 . Chacune peut être impliquée seule dans une bifurcation (doublement de période, rupture de symétrie) sans altération du nombre $L(N_1, N_2)$.

Seules des doublements de période et des bifurcations nœud-col apparaissent suivant une augmentation de a , c'est à dire qu'il n'existe aucune bifurcation entre deux orbites déjà existantes hormis un élagage. De ce fait, les propriétés topologiques des bandes 0 et 1 sont préservées au sein de l'attracteur à trois lettres car ces orbites ne subissent ni doublement de période, ni rupture de symétrie. Les seules bifurcation que peuvent subir les orbites codées sur la dynamique binaire sont des bifurcations nœud-col inverse responsables de l'élagage. Aussi seule la bande 2 reste à caractériser.

D'après l'application de premier retour nous savons qu'elle est paire. Une visualisation de cette bande par intégration d'un ensemble de conditions initiales respectant la partition (2.21) nous permet de constater qu'elle effectue une boucle (fig. 2.15.a). Etant donné qu'il y a *isotopie* (déformation continue) entre une boucle et une torsion d'un tour [19], la torsion locale de cette bande est donc de -2 (selon la convention d'intersection standard [18]). La superposition des bandes 1 et 2 (fig. 2.15.b) met en évidence une intersection négative : en effet, la configuration en boucle de la bande 2 la permute de l'extérieur vers l'intérieur de l'attracteur par dessous la bande 1. La bande 2 est alors prise en sandwich entre la bande 0 et la bande 1. L'insertion des bandes est maintenant 0, 2, 1 (fig. 2.15.b).

Classant les bandes selon l'ordre $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$, nous obtenons alors le patron non-standard de la figure 2.16.a. De manière à respecter la convention standard d'insertion, le patron standard est dressé (fig. 2.16.b). La matrice associée à ce patron est la suivante :

$$M_{Ros_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Cette matrice est vérifiée à l'aide du lien formé par le couple d'orbites de séquences symboliques respectives (20) et (21). Construisons le graphe d'insertion (fig. 2.17) selon les deux règles précédemment énoncées : nous obtenons un nombre d'insertions $N_{ins}(20, 21)$ égal à 2. Le nombre de liaisons est alors obtenu :

$$\begin{aligned} L(20, 21) &= \frac{1}{2} [M(2, 2) + M(2, 1) + M(2, 0) + M(1, 0) + N_{ins}(20, 21)] \\ &= \frac{1}{2} [-2 - 2 - 1 - 1 + 2] = -2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ce nombre est aisément vérifié sur la projection dans le plan xy de ces deux orbites (figure 2.18).

Nous avons maintenant caractérisé l'attracteur à trois bandes du système de Rössler. Poursuivons notre étude par une nouvelle augmentation du paramètre de contrôle a .

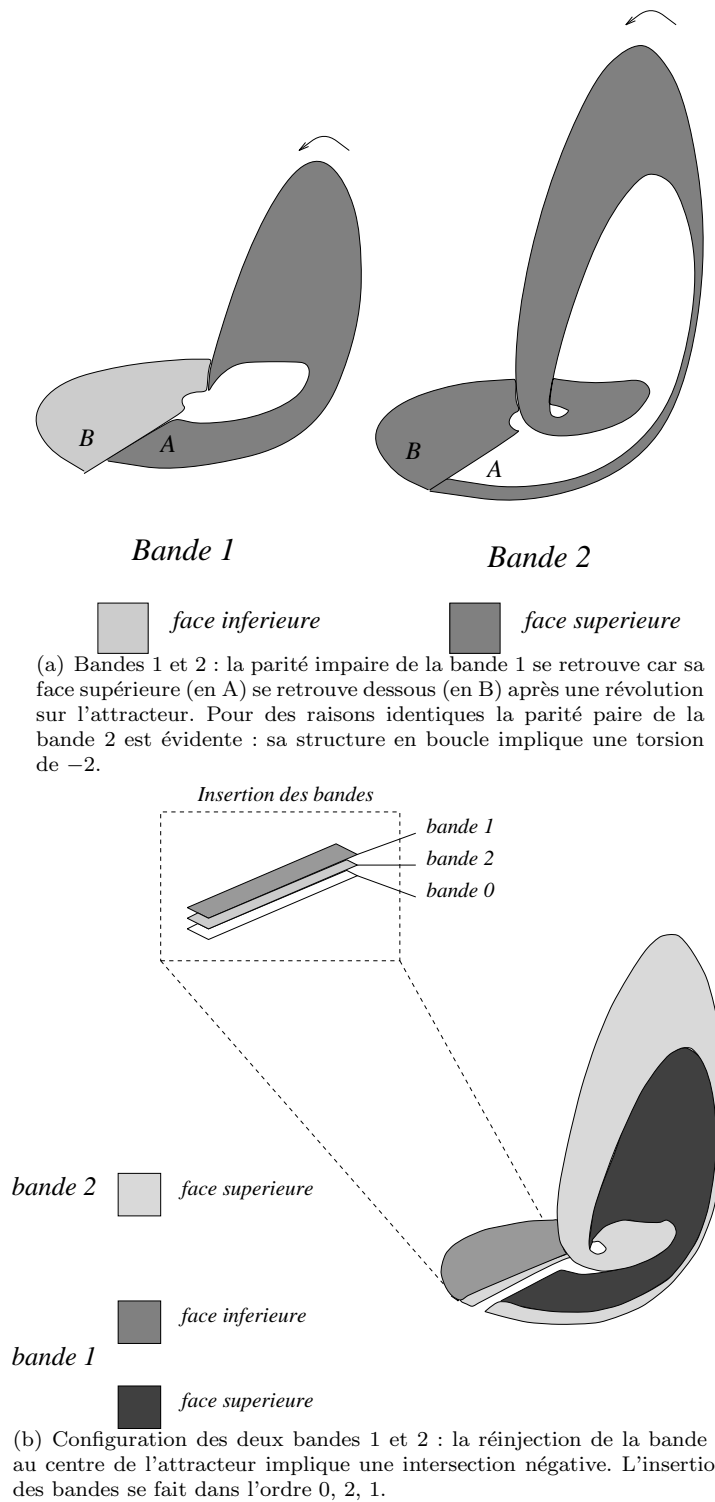


FIG. 2.15 – Configuration des bandes sur l'attracteur à trois lettres du système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.492,2,4)$.

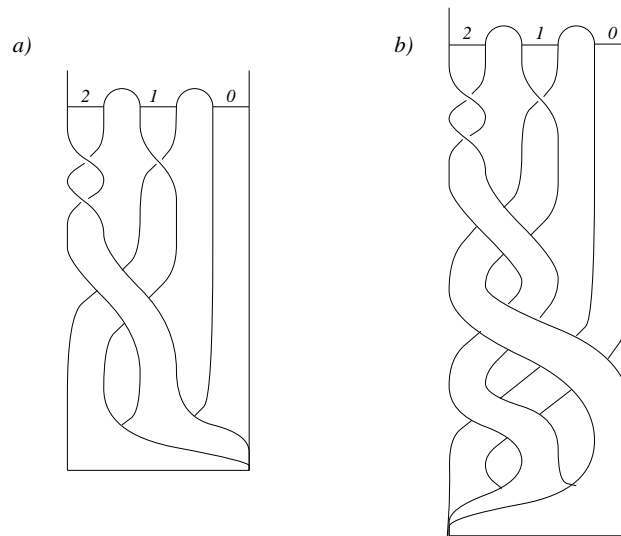


FIG. 2.16 – a) Patron non-standard de l'attracteur à trois lettres du système de Rössler commandé par les paramètres $(a, b, c) = (0.492, 2, 4)$. b) Patron standard équivalent au précédent.

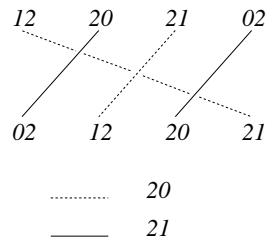


FIG. 2.17 – Graphe d'insertion entre les orbites périodiques (20) et (12) : la base supérieure est construite par permutation en bloc des bandes 1 et 2 avec la bande 0 en vertu de la seconde règle.

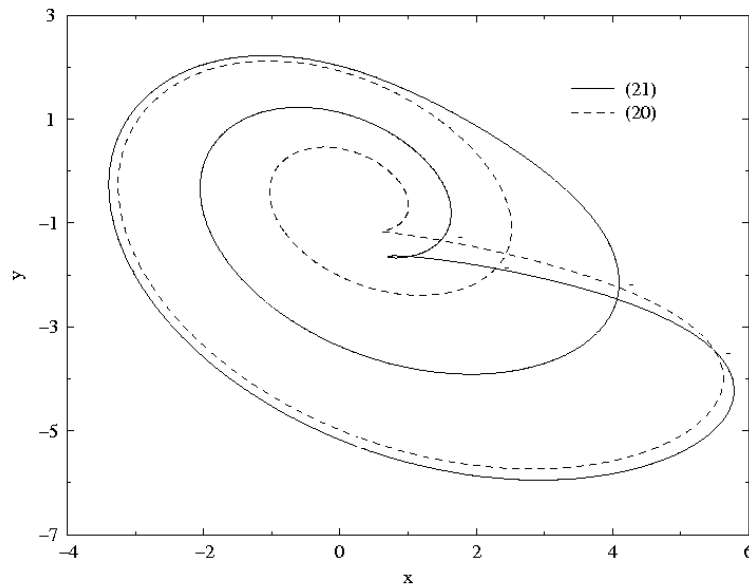


FIG. 2.18 – Projection des orbites périodiques (20) et (21) : quatre intersections négatives sont dénombrées.

2.4.2 A quatre lettres

Le paramètre de contrôle est augmenté jusqu'à une valeur précédant l'apparition d'une cinquième lettre. Ainsi le point de l'espace des paramètres $(a, b, c) = (0.523, 2, 4)$ est très voisin du point critique où une cinquième lettre apparaît sur l'attracteur (fig. 2.19). La population d'orbites périodiques est maintenant fortement élarguée ce qui implique que certaines orbites n'apparaissent jamais sur l'attracteur. Sa caractérisation topologique sera réalisée.

Population d'orbites périodiques

L'application de premier retour de la section de Poincaré P_x à elle-même (figure 2.19) comporte maintenant une quatrième branche décroissante : la bande 3 est donc impaire. La partition génératrice est définie par :

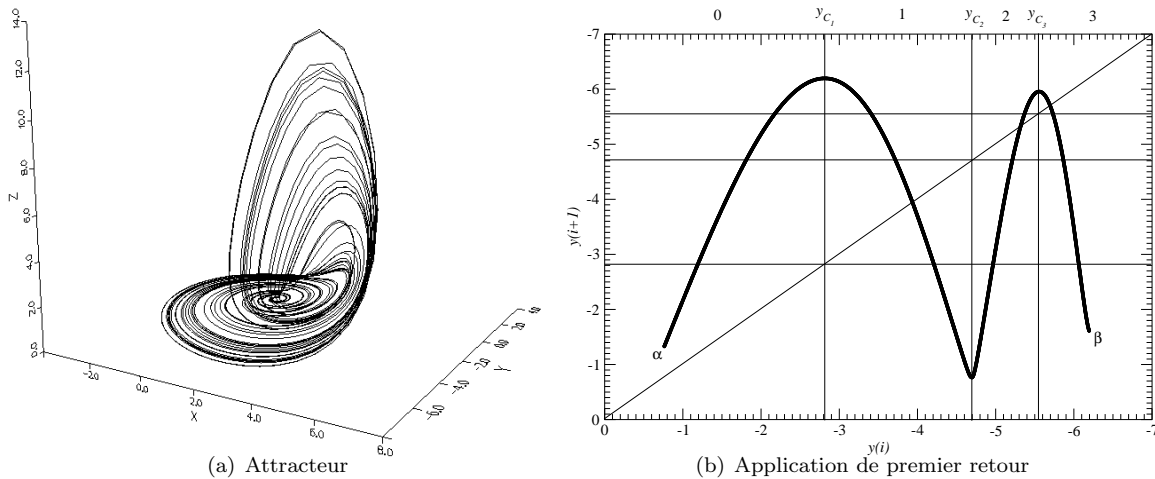


FIG. 2.19 – Attracteur solution du système de Rössler commandé par les paramètres $(a, b, c) = (0.523, 2, 4)$ et son application de premier retour de la section de Poincaré P_x à elle-même.

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < y < y_{c_1} \\ 1 & \text{si } y_{c_1} < y < y_{c_2} \\ 2 & \text{si } y_{c_2} < y < y_{c_3} \\ 3 & \text{si } y_{c_3} < y < \beta \end{cases} \quad (2.25)$$

où

$$\begin{cases} y_{c_1} = -2.79 \\ y_{c_2} = -4.67 \\ y_{c_3} = -5.52 \end{cases} \quad (2.26)$$

Suivant la méthode précédente, la population d'orbites périodiques est extraite et reportée dans le tableau 2.4 où les séquences symboliques sont proposées.

Table 2.4 : suite

TAB. 2.4 – Population d'orbites périodiques de l'attracteur de Rössler commandé par les paramètres $(a, b, c) = (0.523, 2, 4)$: la population est élaguée.

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence
1	3	-3.9379773231553	0.4585986331588	1
		-5.3178228019834	0.4379228824724	2
		-5.6976375874403	0.4328713875627	3
2	6	-4.4565533849962	0.4503527253839	10
		-4.8552934717757	0.4444176413923	20
		-5.0618517819128	0.4414681341184	21
		-5.7578681735005	0.4320920154700	32
		-6.0356763191889	0.4285698715807	31
		-6.0877677858756	0.4279222740870	30
3	14	-4.5066880859819	0.4495881554894	101
		-4.6426696658316	0.4475414189871	100
		-4.7344044607810	0.4461824478302	200
		-4.8072869641984	0.4451149619718	201
		-5.1166336684958	0.4406993875114	211
		-5.1669111976684	0.4399986561953	210
		-5.2389298771080	0.4390029657378	220
		-5.2687198947879	0.4385938447116	221
		-5.7624366229160	0.4320331533748	323
		-5.7734009388191	0.4318919492495	322
		-5.8242479668035	0.4312396792183	321
		-5.8395563356665	0.4310440967080	320
		-5.9142270168341	0.4300952117938	310
		-5.9343617298083	0.4298407442186	311
4	43	-4.4925685144006	0.4498029348749	1011
		-4.6685883863202	0.4471557158088	1001
		-4.7145431841579	0.4464752409220	2001
		-4.8194821410247	0.4449373929206	2011
		-4.8365629108050	0.4446891398001	2010
		-5.0702234832130	0.4413502946981	2120
		-5.0882175888046	0.4410974548689	2110
		-5.1016595176641	0.4409089654330	2111
		-5.1851026755161	0.4397463303698	2101
		-5.2005339436441	0.4395326711574	2100

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence
4		-5.2182677608797	0.4392876946195	2200
		-5.2274175450005	0.4391615060114	2201
		-5.2803637616913	0.4384343300359	2211
		-5.2887656481668	0.4383194406446	2210
		-5.3025853686511	0.4381306274378	2220
		-5.3081248116070	0.4380550588208	2221
		-5.7611506860276	0.4320496638682	3233
		-5.7745582035381	0.4318770905007	3223
		-5.7766996699763	0.4318495405294	3222
		-5.7867043709936	0.4317208886986	3221
		-5.7898876813758	0.4316800449271	3220
		-5.8038726506031	0.4315006009869	3210
		-5.8084871257508	0.4314413883635	3211
		-5.8209200669084	0.4312822536784	3212
		-5.8226439441656	0.4312601927663	3213
		-5.8414082766278	0.4310204716749	3203
		-5.8430122729145	0.4309999669634	3202
		-5.8556880982841	0.4308383547835	3201
		-5.8600298135565	0.4307830547260	3200
		-5.8795175974102	0.4305352218115	3100
		-5.8864087632858	0.4304477088449	3101
		-5.9078020364797	0.4301765216923	3102
		-5.9094605725245	0.4301555320216	3103
		-5.9393968885880	0.4297772676352	3113
		-5.9402862199186	0.4297660584229	3112
		-5.9592584175122	0.4295270232037	3111
		-5.9640728785379	0.4294664943085	3110
		-5.9834001246915	0.4292237263459	3120
		-5.9861925797929	0.4291886339203	3121
		-6.0925786294864	0.4278627124901	3031
		-6.1521442578471	0.4271275450269	3021
		-6.1538411112912	0.4271066836182	3020
		-6.1906018536837	0.4266556068447	3010
	-6.1922406054567	0.4266355250965	3011	

Extraction du patron

La caractérisation de la bande 3 est effectuée à l'aide d'une représentation tridimensionnelle obtenue par l'intégration de conditions initiales respectant la partition (2.25). Nous pouvons voir la bande 3 comme une bande 2 à laquelle une torsion d'un demi-tour est adjointe (fig. 2.20) : sa torsion locale est donc égale à -3 . La structure en boucle commune aux bandes 2 et 3 implique deux intersections négatives de ces deux bandes (une boucle présente une torsion locale d'un tour) : une troisième est ajoutée afin de respecter la convention d'insertion des bandes. A l'image de la bande 2, la bande 3 est réinjectée au centre de l'attracteur par dessus la bande 1 impliquant une intersection négative : une seconde est ajoutée en raison de la convention d'insertion standard. Aucune intersection avec la bande 0 n'est à noter.

Le patron non-standard est alors dressé (figure 2.21.a). Son équivalent standard est immédiatement obtenu (figure 2.21.b).

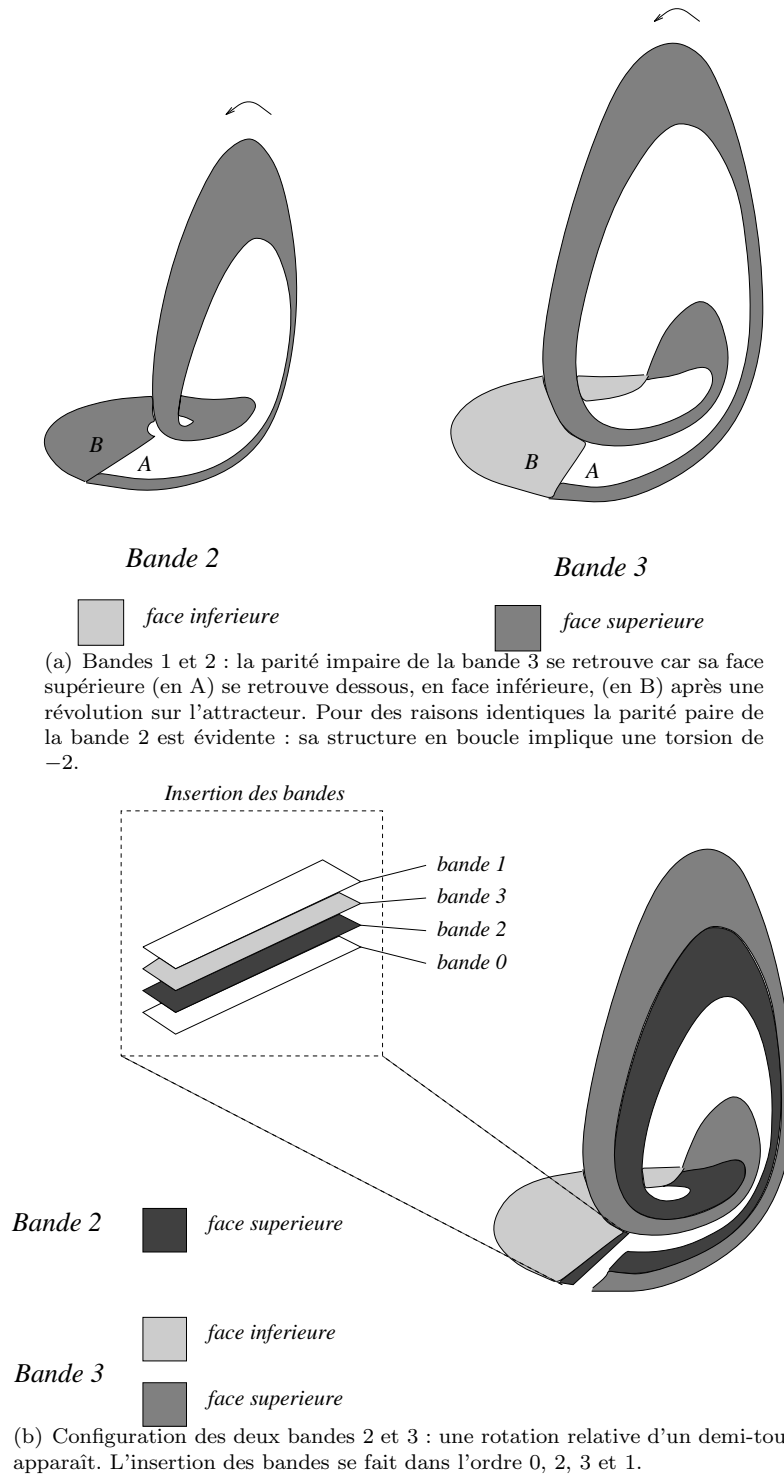


FIG. 2.20 – Configuration des bandes 2 et 3 sur l'attracteur à trois lettres du système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.523,2,4)$. L'insertion des bandes est détaillée dans la section suivante.

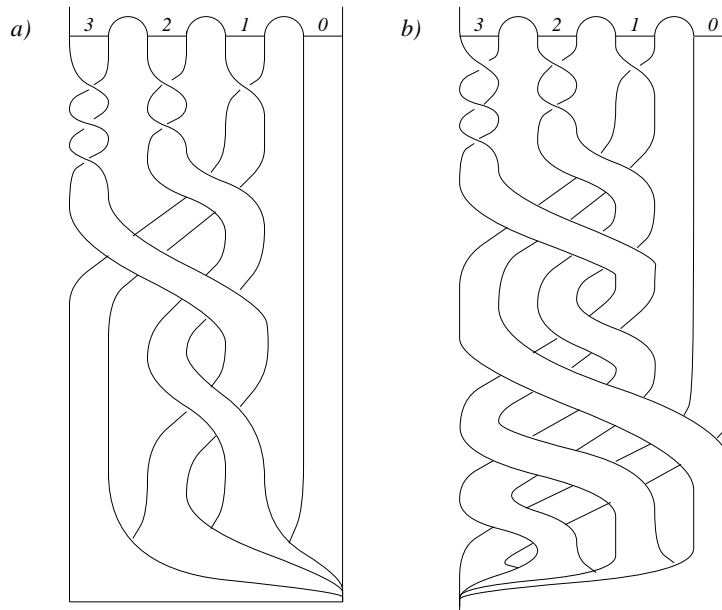


FIG. 2.21 – a) Patron non-standard de l'attracteur à quatre bandes du système de Rössler. b) Patron standard équivalent au précédent.

Selon l'ordre $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, la matrice du patron M_{Ros_4} est de la forme :

$$M_{Ros_4} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Cette matrice est vérifiée à l'aide du lien formé par le couple d'orbites de séquences symboliques respectives (31) et (32). Nous construisons le graphe d'insertion selon les règles d'usage. Nous obtenons le nombre d'insertions suivant : $N_{ins}(32, 31) = 2$. Le nombre de liaisons est alors obtenu :

$$\begin{aligned} L(32, 31) &= \frac{1}{2} [M(3, 3) + M(3, 2) + M(3, 1) + M(2, 1) + N_{ins}(32, 31)] \\ &= \frac{1}{2} [-3 - 3 - 2 - 2 + 2] = -4 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ce nombre est vérifié sur la projection dans le plan xy de ces deux orbites (fig. 2.22).

Nous avons maintenant caractérisé l'attracteur à quatre bandes du système de Rössler. Poursuivons notre étude par une nouvelle augmentation du paramètre de contrôle a .

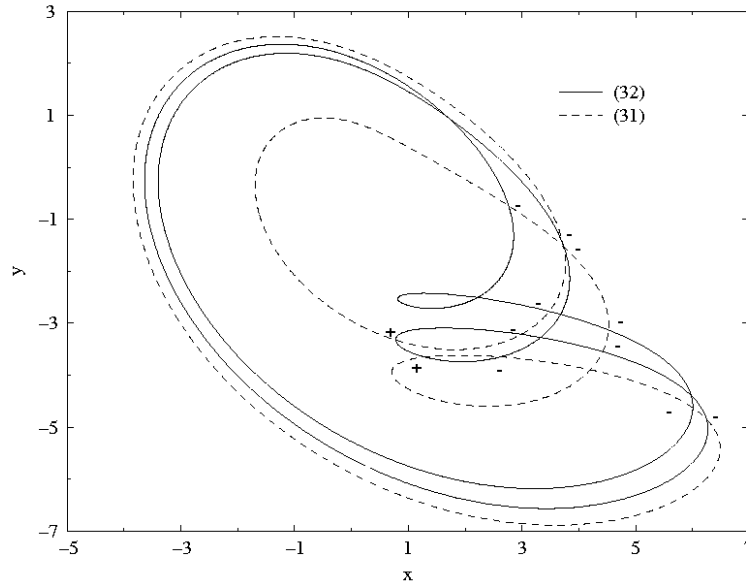


FIG. 2.22 – Projection des orbites périodiques (32) et (31) : huit intersections négatives sont dénombrées.

2.4.3 Processus infini ?

L'apparition de lettres supplémentaires se poursuit suivant le même processus : une nouvelle bande avec une torsion locale augmentée d'un demi-tour par rapport à la bande précédente. L'enchevêtrement se développe suivant une configuration en spirale, ce qui permet de dresser une matrice de patron à n lettres. Cependant le processus sera interrompu par une crise frontalière.

Généralisation à n lettres

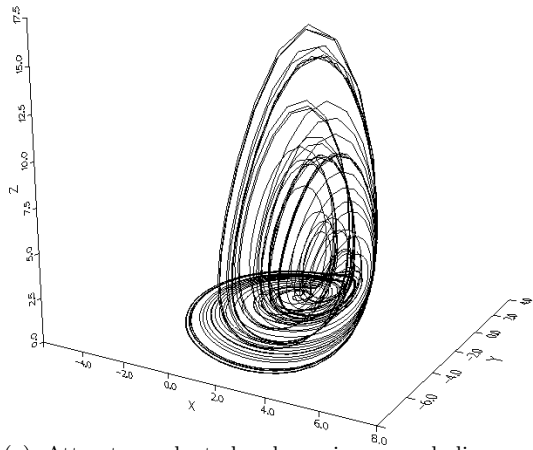
Sous une augmentation du paramètre de contrôle a , le chaos se développe toujours et une cinquième lettre apparaît, puis une sixième, puis... et cela jusqu'à onze lettres pour $(a, b, c) = (0.556, 2, 4)$ (fig. 2.23). L'application de premier retour présente alors onze branches monotones, alternativement croissantes et décroissantes.

La partition génératrice est donnée par :

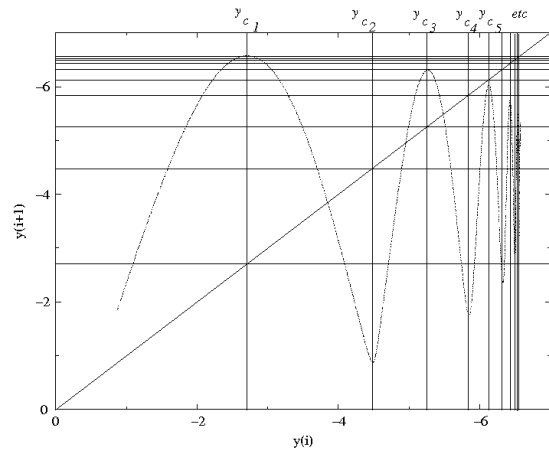
$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \alpha < y < y_{c_1} \\ 1 & \text{si } y_{c_1} < y < y_{c_2} \\ 2 & \text{si } y_{c_2} < y < y_{c_3} \\ 3 & \text{si } y_{c_3} < y < y_{c_4} \\ 4 & \text{si } y_{c_4} < y < y_{c_5} \\ 5 & \text{si } y_{c_5} < y < y_{c_6} \\ 6 & \text{si } y_{c_6} < y < y_{c_7} \\ 7 & \text{si } y_{c_7} < y < y_{c_8} \\ 8 & \text{si } y_{c_8} < y < y_{c_9} \\ 9 & \text{si } y_{c_9} < y < y_{c_{10}} \\ A & \text{si } y_{c_{10}} < y < \beta \end{array} \right. \quad (2.29)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{c_1} = -2.71 \\ y_{c_2} = -4.47 \\ y_{c_3} = -5.25 \\ y_{c_4} = -5.84 \\ y_{c_5} = -6.13 \\ y_{c_6} = -6.31 \\ y_{c_7} = -6.43 \\ y_{c_8} = -6.49 \\ y_{c_9} = -6.55 \\ y_{c_{10}} = -6.56 \end{array} \right. \quad (2.30)$$



(a) Attracteur dont la dynamique symbolique se décompose sur onze lettres.



(b) Application de premier retour.

FIG. 2.23 – Comportement asymptotique du système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.556,2,4)$.

Comme précédemment, la population d'orbites périodiques a été extraite et reportée dans le tableau (2.5). La codification des bandes est étendue suivant la notation hexadécimale, ainsi A est attribuée à la 11^{ème} lettre.

TAB. 2.5 – Population d’orbites périodiques de l’attracteur de Rössler commandé par les paramètres $(a, b, c) = (0.556, 2, 4)$: la population est élaguée.

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence
1	3	-3.8481141582905	0.4622749131940	1
		-4.9528631518317	0.4450383661755	2
		-5.4833990742777	0.4376492540591	3
2	16	-4.3199285487758	0.4545748287075	10
		-4.5994985407178	0.4502581509604	20
		-4.8010262442292	0.4472502619089	21
		-5.5367113390793	0.4369342002713	32
		-5.6891174987125	0.4349160254989	31
		-5.7973212066753	0.4335061207904	30
		-5.8937247445263	0.4322654688396	40
		-5.9505988191180	0.4315402541655	41
		-6.0385407273950	0.4304285802476	42
		-6.0537764179678	0.4302372257296	43
		-6.2029840643699	0.4283806546466	53
		-6.2110294711705	0.4282814561217	52
		-6.2896154470674	0.4273174607759	51
		-6.3570327372037	0.4264973893653	61
		-6.4931697945992	0.4248605425749	71
		-6.5029341673142	0.4247441531846	71
3	67	-4.3540113320332	0.4540392526988	101
		-4.5704735329779	0.4506983454178	201
		-4.8308125458496	0.4468127371019	211
		-4.8731074005346	0.4461945254322	210
		-4.9105617319896	0.4456500405784	220
		-4.9332757377479	0.4453211626625	221
		-5.5377424610174	0.4369203915211	323
		-5.5444039220256	0.4368314097628	322
		-5.5635637425738	0.4365758397000	321
		-5.5776520777802	0.4363882761037	320
		-5.6148112738288	0.4358952351909	310
		-5.6392076527172	0.4355727549812	311
		-5.6728946876622	0.4351290966347	312
		-5.6826477629949	0.4350009890530	313
		-5.8138192820775	0.4332927900706	303
		-5.8339294242845	0.4330332950013	302
		-5.8628377629686	0.4326613765487	402
-5.8783730008123	0.4324620927854	403		
-5.9592260712181	0.4314306995188	413		
-5.9630621391978	0.4313820412094	412		
-5.9826446466581	0.4311338142913	411		
-5.9923981486657	0.4310104645100	410		
-6.0136393409851	0.4307422067594	420		
-6.0188417188169	0.4306766439385	421		

période	nombre	coordonnée en y	coordonnée en z	séquence
3		-6.0299867075993	0.4305362589008	422
		-6.0319662453159	0.4305113204417	423
		-6.0610466690179	0.4301459261075	433
		-6.0630974672741	0.4301202752628	432
		-6.0768045503851	0.4299485357417	431
		-6.0842867562370	0.4298549150655	430
		-6.0973401356342	0.4296917863010	440
		-6.1042925338807	0.4296049509762	441
		-6.1552977552515	0.4289704639150	541
		-6.1613911160932	0.4288949273326	540
		-6.1740917001756	0.4287376316988	530
		-6.1801154762434	0.4286630439742	531
		-6.1928535374852	0.4285056898091	532
		-6.1940757876293	0.4284905706686	533
		-6.2194260723539	0.4281780099820	523
		-6.2203533940320	0.4281666016129	522
		-6.2302977698627	0.4280442968554	521
		-6.2335862376093	0.4280038325317	520
		-6.2520627698736	0.4277769754624	510
		-6.2576801171337	0.4277081227677	511
		-6.2749315353590	0.4274969250967	512
		-6.2758609765226	0.4274855585879	513
		-6.3772411288600	0.4262528108243	611
		-6.3796614276475	0.4262235464862	610
		-6.3901953888831	0.4260963407513	620
		-6.3914684830186	0.4260809121751	621
		-6.4223265669251	0.4257091765128	631
		-6.4365752794555	0.4255379655396	731
		-6.4637319641765	0.4252123661391	721
		-6.4645230183882	0.4252029143034	720
		-6.4731290218132	0.4250999614612	710
		-6.4744518423258	0.4250841208784	711
	-6.5160805998695	0.4245875443296	811	
	-6.5166707790047	0.4245805773172	810	
	-6.5216899458086	0.4245208704192	820	
	-6.5219924615377	0.4245172745848	821	
	-6.5467529378741	0.4242232372004	921	
	-6.5469294893098	0.4242211428736	920	
	-6.5508678008092	0.4241744524450	910	
	-6.5511483786272	0.4241710996106	911	
	-6.5655739193512	0.4240002517764	A11	
	-6.5680481915855	0.4239709814308	A20	
	-6.5656848166964	0.4239988974202	A10	
	-6.5680993543431	0.4239703915192	A21	

Le ruban s'est enroulé en spirale (fig. 2.24.a), multipliant les croisements entre les différentes bandes. L'insertion des bandes se fait suivant l'ordre (fig. 2.24.b) :

$$0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow A \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

Les bandes continuent de s'enchevêtrer selon le même processus et la matrice du patron à $n + 1$ bandes peut

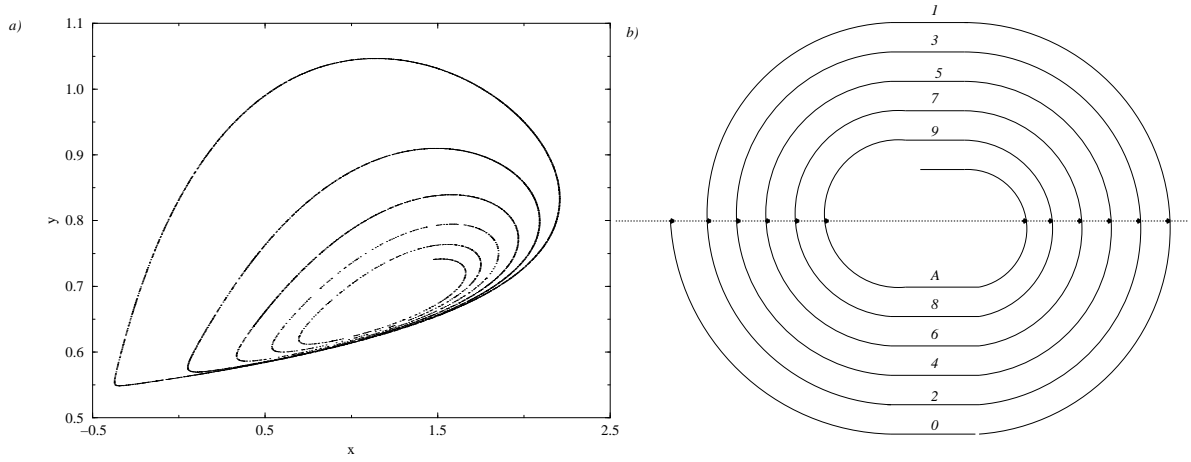


FIG. 2.24 – a) Structure en spirale de la section de Poincaré de l'attracteur du système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.556,2,4)$ et b) schématisation de cette structure avec la dynamique symbolique de l'attracteur : la structure en spirale rend systématique la croissance de l'attracteur.

s'écrire sous la forme :

$$M_{Ros_{n+1}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & \dots & \dots & -(n-2) & -(n-1) & -(n-1) \\ -1 & -2 & \dots & \dots & -(n-1) & -(n-1) & -n \\ -1 & -2 & \dots & \dots & -(n-1) & -n & -n \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Etant donné la figure imposante que cela nécessiterait, le patron à onze lettres n'est pas représenté. Toutefois, cette matrice $M_{Ros_{11}}$ peut être vérifiée par un calcul du nombre de liaisons à partir de la relation (2.11). Nous ne donnerons qu'une vérification partielle. Choisissons le couple d'orbites $(61, 2)$. Le nombre de liaisons $L(61, 2)$ est alors donné par :

$$\begin{aligned} L(61, 2) &= \frac{1}{2} [M(6, 1) + M(2, 1) + N_{ins}(61, 2)] \\ &= \frac{1}{2} [-3 - 1 + 1] = -2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

où le nombre d'insertion $N_{ins}(61, 2) = 1$ est obtenu à l'aide du graphe d'insertion habituel. Ce nombre est vérifié par comptage des intersections orientées sur une projection dans le plan xy de ces deux orbites (fig. 2.25).

Décès de l'attracteur

Sur la ligne de l'espace des paramètres choisie, ce processus est infini et une loi d'échelle a été trouvée [27]. Il existe une valeur critique a_c du paramètre de contrôle pour laquelle il se produit alors une crise frontalière [28], c'est à dire qu'une collision entre l'attracteur et le point fixe F_+ intervient à la frontière du bassin d'attraction (le plan séparateur contenant le point F_+). Cette crise est dramatique pour l'existence de l'attracteur car le plan séparateur peut maintenant être franchi et la trajectoire éjectée à l'infini (fig. 2.26). L'attracteur est alors associé à un chaos transitoire.

Le paramètre de contrôle critique a_c est un peu à l'image du point d'accumulation à l'issu de la cascade de doublements de période : un nombre infini de points critiques est alors présent sur l'application de premier retour [27].

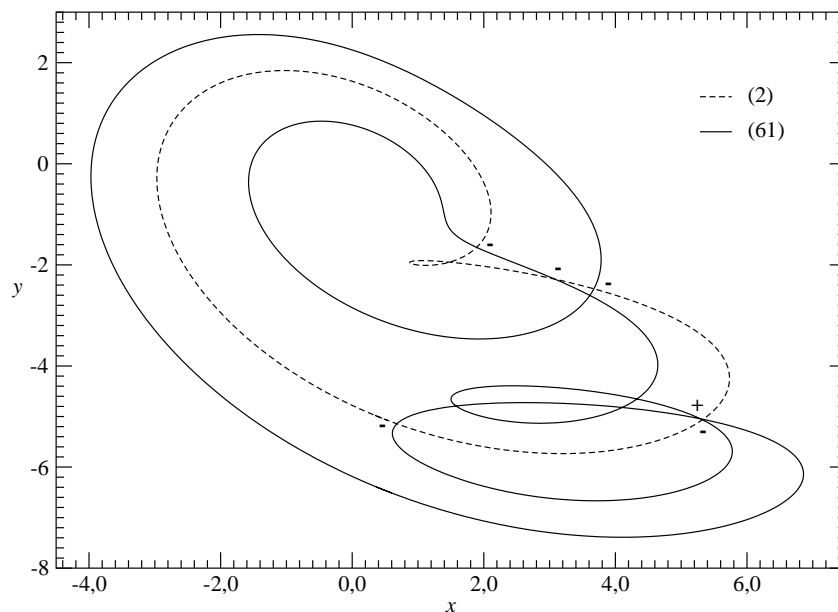


FIG. 2.25 – Projection du couple d'orbites (61,2) sur le plan $x-y$: $L(61, 2) = \frac{1}{2}(-5 + 1) = -2$.

2.5 Conclusion

L'évolution du système de Rössler sur une ligne de l'espace des paramètres a été étudiée. Chaque attracteur a été caractérisé. L'ordre d'apparition des orbites périodiques a été déterminé ainsi que leur ordre de disparition. La loi de croissance de l'attracteur a pu alors être formalisée par l'intermédiaire de la matrice du patron.

De la compréhension profonde de l'évolution de la population d'orbites périodiques, une distinction très fine des divers régimes asymptotiques a pu être réalisée. Cette technique de caractérisation s'avère plus puissante que les techniques basées sur la transformée de Fourier qui, lorsque le chaos est suffisamment développé, n'apportent plus aucune information (le spectre de puissances est alors composé d'une large bande).

De plus, elle permet de prédire quelles évolutions peut subir un attracteur sous variation de ses paramètres de contrôle. En effet, connaissant la topologie d'un attracteur donné, nous savons que certaines configurations ne peuvent être obtenues par croissance continue de celle-ci.

Toutefois la caractérisation topologique s'appuie sur une application de premier retour. Ceci peut amener certaines complications face à des systèmes peu dissipatifs : le ruban sur lequel est inscrite la population d'orbites périodiques peut révéler une épaisseur qui noie la structure de l'application de premier retour dans un nuage.

La caractérisation topologique devra être étendue aux systèmes s'inscrivant sur des tores. Ceci sera d'un intérêt particulier pour les régimes quasi-périodiques ou certaines intermittences rencontrées sur l'expérience du fil chaud [29].

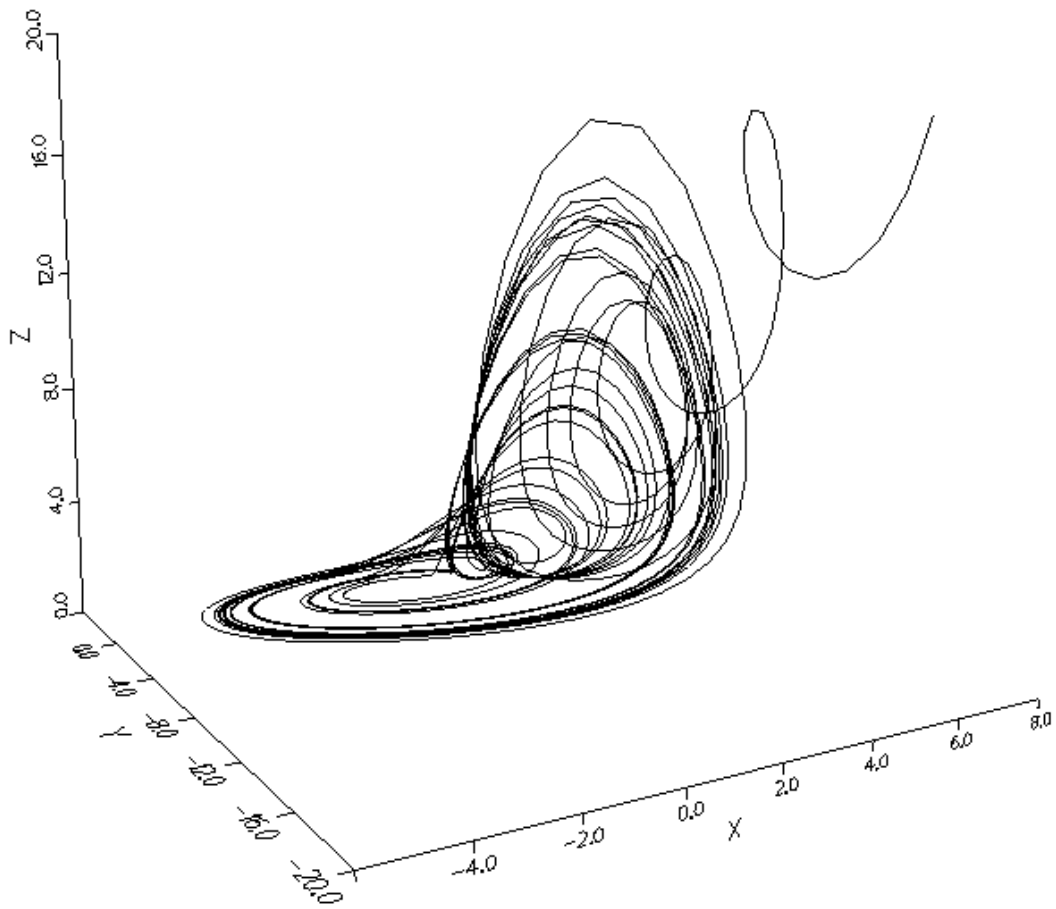


FIG. 2.26 – Ejection de la trajectoire à l'infini après que celle-ci ait décrit plusieurs révolutions sur l'attracteur.

Bibliographie

- [1] **H. Poincaré.** *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villard, Paris, 1892.
- [2] **E. N. Lorenz.** Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, pp.130-141, 1963.
- [3] **J. P. Eckmann, S. Oliffson, D. Ruelle, S. Ciliberto.** Lyapunov exponents from time series, *Physical Review A*, 34 (6), pp. 4971-4979, 1986.
- [4] **P. Grassberger, I. Procaccia.** Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica D*, 9, pp. 189-198, 1983.
- [5] **P. Cvitanović.** Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and Quantum Chaos, *Physica D*, 51, pp. 138-151, 1991.
- [6] **G. B. Mindlin, X. J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, N. B. Tufillaro.** Classification of Strange Attractors by Integers, *Physical Review Letters*, 64 (20), pp. 2350-2353, 1990.
- [7] **G. B. Mindlin, R. Gilmore.** Topological analysis and synthesis of chaotic time series, *Physica D*, 58, pp. 229-242, 1992.
- [8] **O. E. Rössler.** An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters*, 57A (5), pp. 397-398, 1976.
- [9] **J. M. T. Thompson, J. M. Stewart.** *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, 1986.
- [10] **Mitchell J. Feigenbaum.** Quantitative Universality for a class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19 (1), pp. 25-52, 1978.
- [11] **J. Guckenheimer, P. Holmes.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [12] **P. Dutertre.** *Caractérisation des attracteurs à l'aide d'orbites périodiques*, Thèse de doctorat, LESP, Rouen, en préparation.
- [13] **P. Cvitanović, B. Eckhardt.** Symmetry Decomposition of Chaotic Dynamics, *Nonlinearity*, 6, pp. 277-311, 1993.
- [14] **Hao Bai Lin.** *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific Publishing, Singapore, 1989.
- [15] **A. N. Sarkovskii.** Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into Itself, *Ukr. Math. Z.*, 16, pp. 61-71, 1964.
- [16] **P. Stefan.** A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphisms of the Real Line, *Communications in Mathematical Physics*, 54, pp. 237-248, 1977.
- [17] **Hao Bai Lin.** *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific Publishing, Singapore, 1989.
- [18] **P. Melvin, N. B. Tufillaro.** Templates and Framed Braids, *Physical Review A*, 44 (6), pp. 3419-3422, 1991.
- [19] **P. Kent, J. Elgin.** Noose Bifurcation of Periodic Orbits, *Nonlinearity*, vol. 4 (4), 1991.
- [20] **L. Le Sceller, C. Letellier, G. Gouesbet.** Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractor, to be published in *Physical Review E*, 49 (5), May 1994.

- [21] **P. Gaspard, G. Nicolis.** What can we learn from Homoclinic Orbits in Chaotic Dynamics?, *Journal of Statistical Physics*, 31 (3), pp. 499-518, 1983.
- [22] **P. Gaspard, R. Kapral, G. Nicolis.** Bifurcation Phenomena near Homoclinic Systems : a Two Parameter Analysis, *Journal of Statistical Physics*, 35 (5/6), pp. 697-727, 1984.
- [23] **P. Glendenning, C. Sparrow.** Local and Global Behavior near Homoclinic Orbit, *Journal of Statistical Physics*, 35 (5/6), pp. 645-696, 1984.
- [24] **O. E. Rössler.** *Z. Naturforsch.*, 31a, pp. 259- , 1976.
- [25] **A. Arnéodo, F. Argoul, J. Elezgaray, P. Richetti.** Homoclinic chaos in chemical systems, *Physica D*, 62, 134-169, 1993.
- [26] **L. P. Sil'nikov.** The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1 (172), pp. 54-58, 1967.
- [27] **C. Letellier, P. Dutertre, B. Maheu.** Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, submitted to *Chaos*.
- [28] **C. Gregori, E. Ott, J. A. Yorke.** Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos *Physica D*, 7, pp. 181-200, 1983.
- [29] **E. Ringuet, C. Rozé, G. Gouesbet.** Experimental observation of type-II intermittency in a hydrodynamic system, *Physical Review E*, 47 (2), pp. 1405-1407, 1993.

Chapitre 3

Le système de Lorenz et sa symétrie

*A trick which exploits the inherent ... symmetry
between the two leaves of the Lorenz flow ... has
yet to be found.*

O. E. RöSSLer, 1976.

3.1 Introduction

Nous avons vu que l'outil clef de la dynamique des systèmes est la description topologique qualitative [1] ou, plus simplement, sa dynamique symbolique. Pour cela l'espace des phases est divisé en régions topologiquement distinctes. A chacune de ces régions est associée une lettre. Ces lettres sont alors utilisées pour coder toutes les trajectoires possibles de manière unique : la partition est alors génératrice.

Si la procédure de caractérisation topologique des systèmes dépourvus de symétrie est maintenant bien établie [2], celle des systèmes symétriques n'est pas encore complètement achevée. En effet, des complications inhérentes aux symétries apparaissent. P. Cvitanović et B. Eckhardt [3] ont récemment publié un article qui nous a permis de formaliser plus précisément ce que nous avons intuité concernant ce problème [24]. En effet, les systèmes symétriques présentent des invariances par rapport à des régions différentes de l'espace des phases. Ils doivent donc être appréhendés à travers une région réduite (un domaine fondamental) de l'espace des phases.

O. E. RöSSLer [4] avait pressenti la difficulté que pouvaient présenter les systèmes symétriques face à la caractérisation de leur comportement dynamique. Il a alors travaillé sur l'obtention d'un ruban "plus simple" et dépourvu de symétrie. C'est ainsi qu'il proposa le système étudié au chapitre précédent. Malheureusement, la route vers le chaos de son modèle diffère de celle empruntée par le système de Lorenz. En effet la symétrie interdit l'existence d'une cascade de Feigenbaum [5]. Le processus d'apparition de ses orbites périodiques n'est toujours pas complètement compris. Nous élaborerons au cours de ce chapitre une procédure de caractérisation des systèmes symétriques. Une dynamique symbolique binaire inédite sera proposée. Nous l'étendrons à une dynamique symbolique à trois lettres. Notre partition restera sans faille sur les attracteurs étudiés (c'est à dire jusqu'à $R = 90$). Pourtant des questions restent posées sur le cas de l'intermittence de type-I apparaissant pour $R = 166.06$ [6]. Ceci ne sera pas traité dans le cadre de cet ouvrage.

A la lumière de cette caractérisation, les spectres de puissance seront étudiés. En effet les spectres de puissance du système de Lorenz diffèrent selon la variable à partir de laquelle ils sont calculés (ce qui n'est pas le cas pour le système de RöSSLer). Une astuce sera alors proposée pour restituer des spectres identiques.

Précisons que des systèmes pourvus de symétrie se rencontrent fréquemment au sein des systèmes hydrodynamiques. Par exemple en 1966, D. W. Moore et E. A. Spiegel [7] construisent un modèle de convection d'un fluide au sein duquel se développe un gradient de température. Leur but est de comprendre l'origine des instabilités dues à la dissipation thermique qui apparaît dans les fluides en rotation pourvus de champs magnétiques (situation souvent rencontrée lors de la modélisation de systèmes stellaires). Les solutions de leur modèle sont

étrangement semblables à celles observées par E. N. Lorenz [8]. Plus récemment, M. Auvergne et A. Baglin [9] proposent un modèle des pulsations radiales stellaires pourvu d'une symétrie centrale.

Enfin, le système de Lorenz a permis de modéliser des systèmes aussi divers qu'une roue à eau [10], une réaction chimique [11], des instabilités optiques d'un laser [12]. Les systèmes symétriques ne sont donc pas exceptions même si leurs observations semblent peu probables. Il ne nous paraît pas plausible d'observer des états physiques que le système lui-même ne distingue pas ...

3.2 La physique du système de Lorenz

E. N. Lorenz est un physicien passionné par la météorologie et le calcul sur ordinateur. Aussi s'intéresse-t-il à l'étude du comportement de l'air. A quelques exceptions près, les mouvements de l'atmosphère sont d'origine convective. Les mouvements de l'air proviennent des irrégularités thermiques qui sont constamment imposées par le soleil. L'échelle et le caractère de ces mouvements varient de manière importante de la turbulence thermique chaotique aux systèmes hautement organisés tels que les cyclones. Dans tous les cas, ils présentent un transport de chaleur et de vorticité (ou moment). C'est ce processus qui introduit l'aspect non-linéaire du comportement atmosphérique.

Une première étape vers la compréhension des formes compliquées de cette non-linéarité est réalisée par l'étude de modèles plus simples que ceux réellement rencontrés. Un exemple de tels modèles, capables d'élucider les propriétés non-linéaires des processus convectifs, est la représentation des variations spatiales du mouvement et de la température dans des expériences du type Rayleigh-Bénard par une décomposition en un nombre limité de termes de Fourier [13].

La convection de Rayleigh-Bénard se développe lorsqu'un fluide est placé dans une petite cellule de hauteur H dont la différence de température ΔT entre les faces inférieure et supérieure (fig. 3.1) est maintenue constante par un chauffage extérieur. Pour simplifier le problème, la géométrie de la petite boîte rectangulaire peut être restreinte de manière à ce que seuls deux ou trois rouleaux se développent. Cet artifice permet de tronquer des degrés de liberté du système et ainsi, de définir des bifurcations simples vers la turbulence [14]. La géométrie rectangulaire impose un chemin non-ambigu aux rouleaux : ils se développent perpendiculairement au plus grand côté.

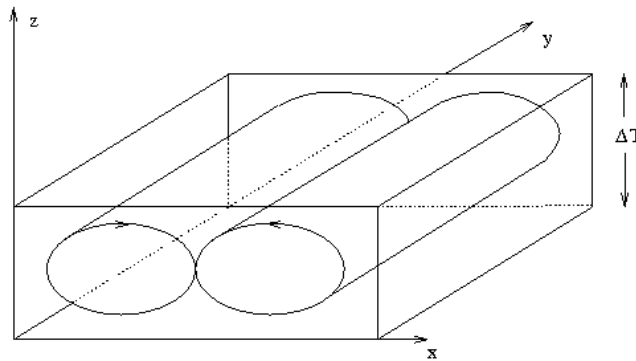


FIG. 3.1 – Cellules de convection de Rayleigh-Bénard

L'expérience des rouleaux de Rayleigh-Bénard est une des situations où l'approximation de Boussinesq [15] est vérifiée. Ces situations apparaissent lorsque la densité ρ varie linéairement avec la température T . On introduit alors un coefficient α de dilatation du volume. Pour les gaz et les liquides tels que ceux qui sont utilisés la plupart du temps, α est de l'ordre de 10^{-3}   10^{-4} et les variations de la densité sont de l'ordre de un pour cent. Les variations des autres coefficients sont ignorées. En revanche les variations de la densité ρ dans le terme $\rho \mathbf{F}$ (terme de gravitation) ne peut être ignorée parce que l'accélération résultant de $\delta \rho \mathbf{F} = \rho \alpha \Delta T \mathbf{F}$ (où ΔT est la différence de température imposée) peut être importante ; plus grande, par exemple, que l'accélération due

au terme $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ dans l'équation du mouvement. Aussi, ρ pourra être traitée comme une constante dans tous les termes de l'équation du mouvement excepté dans celui de la force gravitationnelle.

Dans le cadre de cette approximation, les équations du mouvement sont de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)w = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g\alpha T \end{cases} \quad (3.1)$$

où (u, v, w) sont les composantes du vecteur vitesse \mathbf{v} et P , la pression génératrice définie par

$$P = \frac{p}{\rho_0} - g(z - H) \quad (3.2)$$

où ρ_0 est la masse volumique moyenne sur l'ensemble du fluide et P la pression hydrostatique. Dans ce système, la variation de la masse volumique est donnée par :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha T) \quad (3.3)$$

L'équation de la conduction de la chaleur est de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T = \kappa \nabla^2 T \quad (3.4)$$

et l'équation de continuité se résume à

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.5)$$

Pour des nombres de Prandtl supérieurs à 1, la structure convective acquiert un caractère tridimensionnel avant toute bifurcation vers un état dépendant du temps (rouleaux croisés, zig-zag) [14] : les effets thermiques sont alors en compétition avec les effets dynamiques. Cependant, pour des fluides de nombres de Prandtl inférieurs à 1, cette structure convective, présente de l'absence de convection jusqu'à l'apparition de la première instabilité dépendant du temps, est bidimensionnelle. Aussi pour simplifier le problème, nous pouvons contraindre les mouvements convectifs de manière à ce qu'ils se développent en rouleaux dans le plan $x - z$ (c'est à dire que $v = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y} = 0$). Dans ce cas les équations se réduisent à

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g\alpha T \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \nabla^2 T \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

En vertu de (3.8), nous pouvons définir une fonction de Courant ψ comme suit :

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (3.9)$$

La température T peut être développée sous la forme d'une perturbation T' par rapport à la valeur moyenne \bar{T} dans un plan horizontal :

$$T(x, z, t) = \bar{T}(z, t) + T'(x, z, t) \quad (3.10)$$

La température moyenne \bar{T} peut alors être développée sous la forme d'une perturbation moyenne sur un plan horizontal \bar{T}' par rapport à une variation linéaire entre les deux surfaces, soit :

$$\bar{T}(z, t) = \left[\bar{T}(0, t) - \frac{\Delta T}{H} z \right] + \bar{T}''(z, t) \quad (3.11)$$

Si nous substituons (3.11) dans (3.10) nous obtenons

$$T(x, z, t) = \left[\bar{T}(0, t) - \frac{\Delta T}{H} z \right] + \theta \quad (3.12)$$

où

$$\theta = \bar{T}''(z, t) + T'(x, z, t) \quad (3.13)$$

Pour ce modèle, nous supposons les conditions de température maintenues constantes sur les faces de la cellule, soit

$$\frac{\partial \bar{T}(0)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{T}(H)}{\partial t} = 0 \quad (3.14)$$

De là, si nous éliminons P de (3.6) en formant l'équation de vorticité relative au problème et que nous introduisons (3.9) et (3.12), nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta \end{cases} \quad (3.15)$$

Ce sont les équations qui gouvernent notre modèle. Notons que $\nabla^2 \psi$ représente la vorticité du mouvement dans le plan $x - z$ (c'est à dire $\nabla^2 \psi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$) et que $\nabla^4 \psi = \nabla^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2}$. Nous pouvons introduire une simplification en écrivant les termes non-linéaires sous la forme d'un opérateur Jacobien

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} = \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

Les relations (3.15) prennent alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} = \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} = \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta \end{cases} \quad (3.17)$$

Le système est alors adimensionnalisé : les longueurs sont exprimées relativement à la hauteur H de la cellule ($x^* = \frac{x}{H}, z^* = \frac{z}{H}, \nabla^{*2} = H^2 \nabla^2$), le temps par rapport au temps caractéristique de $\frac{H^2}{\kappa}$ ($t^* = \frac{\kappa t}{H^2}$), la température en unité de $\frac{\kappa \nu}{g\alpha H^3}$ ($\theta^* = \frac{\kappa \nu \theta}{g\alpha H^3}$) et la fonction de Courant par $\psi^* = \frac{\psi}{\kappa}$. Un système d'équations adimensionnelles est alors obtenu :

$$\begin{cases} \nabla^{*2} \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\psi^*, \nabla^{*2} \psi^*)}{\partial(x^*, z^*)} = \sigma \nabla^{*4} \psi^* + \sigma \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial(\psi^*, \theta^*)}{\partial(x^*, z^*)} = R \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} + \nabla^{*2} \theta^* \end{cases} \quad (3.18)$$

où

$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$ est le nombre de Prandtl

$R_\alpha = \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\kappa \nu}$ est le nombre de Rayleigh

Les conditions aux limites choisies par B. Saltzman [13] sont les suivantes :

$$\psi = 0 \Leftrightarrow \psi^* = 0 \quad (3.19)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \Leftrightarrow \nabla^{*2} \psi^* = 0 \quad (3.20)$$

pour la surface supérieure, et

$$\psi = 0 \quad (3.21)$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

pour la surface inférieure. Rayleigh [16] montre que les solutions du système linéarisé (3.18) sont alors de la forme :

$$\begin{cases} \psi^* = \psi_0 \sin\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \\ \theta^* = \theta_0 \cos\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \end{cases} \quad (3.23)$$

lorsque le nombre de Rayleigh excède une valeur critique

$$R_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2} \quad (3.24)$$

Le minimum de cette valeur critique apparaît lorsque $a^2 = 1/2$: les proportions du rectangle minimalisent alors la différence de température nécessaire à l'apparition de la convection.

De ce système, Barry Saltzman [13] dérive un jeu de sept équations différentielles ordinaires par un développement de ψ et θ en une double série de Fourier auquel il applique une troncature suivant la proposition de Edward Lorenz [17]. B. Saltzman intègre numériquement son système et remarque que toutes les variables exceptées trois tendent vers zéro. Les trois variables restantes présentent des fluctuations non-périodiques dépendant du temps.

E. N. Lorenz [8] montre alors que des solutions identiques sont obtenues si les séries sont issues d'une troncature ne gardant que trois termes au total. Ceci peut être réalisé en appliquant au système (3.18) le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \frac{a\psi}{(1+a^2)\kappa} = X\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \\ \frac{\pi R_a \theta}{R_c \Delta T} = Y\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - Z \sin\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \end{cases} \quad (3.25)$$

où X, Y et Z sont des fonctions dépendant uniquement du temps. Les termes trigonométriques autres que ceux apparaissant dans (3.25) sont rejetés. Le système de trois équations différentielles ordinaires de Lorenz est alors obtenu :

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = RX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -bZ + XY \end{cases} \quad (3.26)$$

où les \dot{X} , \dot{Y} et \dot{Z} sont les dérivées par rapport au temps adimensionnel

$$\tau = \frac{\pi^2(1+a^2)\kappa}{H^2} t \quad (3.27)$$

tandis que $R = \frac{R_a}{R_c}$ et $b = \frac{4}{(1+a^2)}$. Les trois variables représentent les quantités physiques suivantes :

X est proportionnelle à l'intensité du mouvement de convection ; le sens de rotation des rouleaux est positif lorsque $X > 0$. Le choix du sens positif ($X > 0$) est arbitraire : nous le prendrons égal au sens trigonométrique. Avec cette convention, un rouleau sera animé d'une rotation trigonométrique pour $X > 0$ et inversement pour $X < 0$.

Y est proportionnelle à la différence de température entre les parties gauche et droite du rouleau : suivant la convention sur le mouvement de convection, la différence de température sera positive lorsque le courant droit sera plus chaud que le courant gauche (fig. 3.2).

Z est la distorsion du profil de température par rapport au profil linéaire présent en l'absence de convection.

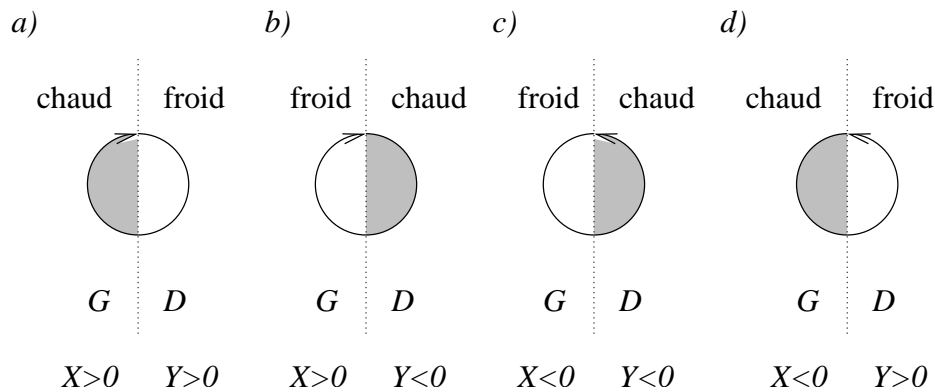


FIG. 3.2 – Interpretation physique et convention des variables du système de Lorenz

Physiquement, il est impossible de distinguer la configuration a) de la c) et la b) de la d). Cette distinction provient de la nécessité d'orienter les axes de l'espace physique, mais le processus physique est rigoureusement le même lorsque les courants chauds (respectivement froids) sont ascendants (respectivement descendants), que la rotation du rouleau soit trigonométrique ou pas. Ceci est l'origine profonde de la symétrie du système de Lorenz.

Le système d'équations de Lorenz offre des résultats réalistes lorsque le nombre de Rayleigh est légèrement supercritique. Etant donné la sévère troncature, les solutions physiques ne peuvent ressembler à celles du système (3.18) quand une forte convection se développe.

3.3 Caractérisation topologique

3.3.1 Points fixes

La ligne de l'espace des paramètres la plus étudiée du système de Lorenz correspond à un nombre de Prandtl σ approximativement égal à deux fois celui de l'eau ($\sigma = 10$) et un paramètre b égal à $8/3$. Le choix du nombre de Prandtl limite la représentativité des solutions obtenues : en effet, les rouleaux ne peuvent se développer dans un plan que si σ est inférieur à 1 [14]. Les solutions apportées par le système de Lorenz ne correspondent donc pas à une réalité physique. Le rapport d'aspect de la cellule de convection correspond à la configuration qui nécessite la différence de température la plus faible pour l'apparition de la convection.

Lorsque $R < 1$ ($R_a < R_c$) l'origine C_0 (0, 0, 0) est globalement stable (fig. 3.3.a). Aucune convection ne se développe et les échanges de chaleur ne se font que par conduction (la variable Z est nulle ce qui signifie qu'il n'y a aucun écart par rapport au profil linéaire de température). Une fois le nombre de Rayleigh critique dépassé ($R > 1$), les premiers rouleaux laminaires de convection apparaissent. Il y a alors deux autres points stationnaires C_{\pm} de coordonnées

$$\begin{cases} X_{\pm} = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ Y_{\pm} = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ Z_{\pm} = R-1 \end{cases} \quad (3.28)$$

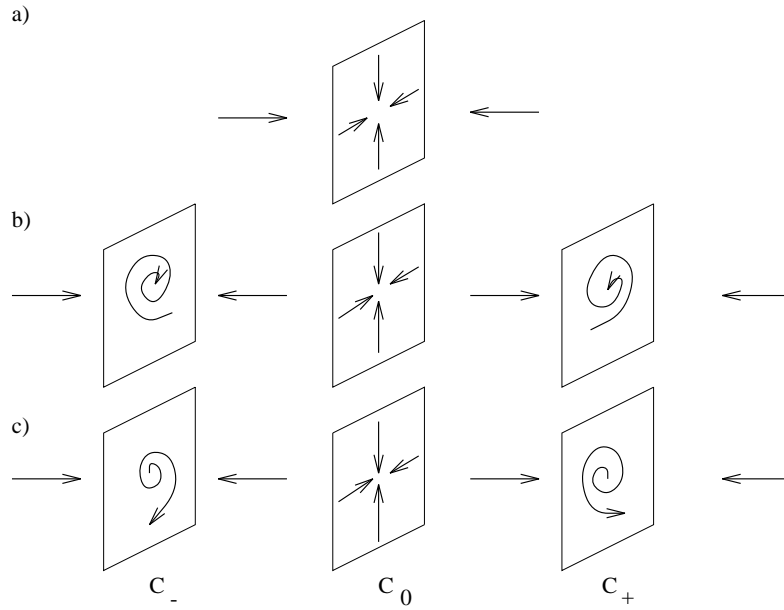


FIG. 3.3 – Vues schématiques du flot au voisinage des points fixes
 a) $R < 1$, b) $1 < R < 24.74$ et c) $R > 24.74$

Les valeurs propres du flot linéarisé respectivement autour de ces deux points fixes C_{\pm} ont toutes une partie réelle négative pour $1 < R < 24.74$ [23]. Les deux points fixes sont donc stables (fig. 3.3.b). Suivant les conditions initiales, un rouleau de convection laminaire va se développer avec une rotation telle que le fluide chaud monte et le fluide froid descende (X_{\pm} de même signe que Y_{\pm}). Remarquons qu’aucune distinction ne peut être faite entre une convection représentée par C_{+} (rotation trigonométrique) et une autre par C_{-} (rotation anti-trigonométrique). Le système de Lorenz ne contient aucune information sur le sens de rotation des rouleaux : seules l’intensité de la convection et la différence de température entre courants ascendants et descendants sont prises en compte.

Pour $R = R_H = 24.74$, deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l’axe imaginaire ; il y a bifurcation de Hopf sous-critique (c’est à dire que les points fixes perdent leur stabilité par l’absorption d’une orbite périodique instable [18]). Au delà de cette valeur critique R_H , le flot linéarisé respectivement autour de C_{\pm} présente une valeur propre réelle négative et une paire de valeurs propres complexes conjuguées avec une partie réelle positive. Les trois points fixes sont alors instables et la trajectoire s’éloignera du voisinage de ces points fixes par une spirale (fig. 3.3.c).

Le comportement asymptotique du système est alors une trajectoire apériodique qui se développe sur un attracteur. A la valeur $R = 28$ le système présente un attracteur chaotique (fig. 3.4). La convection est alors turbulente. Les rouleaux de convection voient leur rotation s’inverser de manière chaotique. Toutefois seules les inversions du sens de rotation des rouleaux sont prises en compte. Rappelons que les équations ne nous permettent en aucun cas de préciser si la rotation se fait dans le sens trigonométrique ou non. Aussi chaque aile peut jouer le rôle de l’autre et réciproquement.

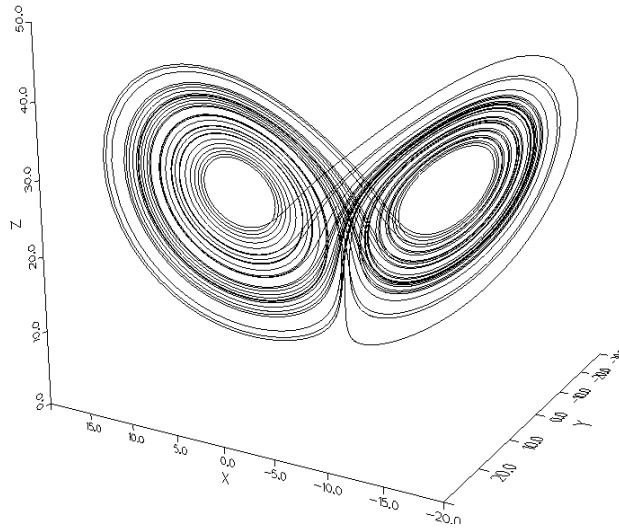


FIG. 3.4 – Attracteur chaotique solution du système de Lorenz. Valeurs des paramètres : $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$.

3.3.2 Equivariance

Le système (3.28) établi par E. Lorenz possède une symétrie axiale. Elle est définie par rapport à la droite perpendiculaire au plan XY et passant par l'origine. Ainsi, nous pouvons passer d'une aile à l'autre par une rotation de $\pm\pi$. Du point de vue mathématique, le système de Lorenz est dit équivariant. Rappelons que le système d'équations différentielles proposé par E. N. Lorenz définit un système dynamique non-linéaire autonome de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.29)$$

où $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de l'espace des paramètres défini par les composantes (R, σ, b) . Un tel système est équivariant si il vérifie la propriété suivante :

$$f(\boldsymbol{\lambda}, \gamma \mathbf{x}) = \gamma f(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.30)$$

où γ est une matrice orthogonale définissant l'équivariance [19]. Dans le cas du système de Lorenz, la matrice orthogonale γ s'écrit :

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Ainsi, (3.29) reste inchangé si nous remplaçons \mathbf{x} par $\gamma \mathbf{x}$. De ce fait, si $\mathbf{x}(t)$ est une solution de (3.29) alors $\gamma \mathbf{x}(t)$ est aussi une solution [19]. La symétrie du système de Lorenz appartient au groupe de symétrie Z_2 (c'est à dire que $\gamma^2 = I$). La signification physique de cette symétrie se retrouve dans le fait qu'une trajectoire dans l'espace des phases ne différencie pas les rotations des rouleaux de convection dans le sens trigonométrique et dans le sens anti-trigonométrique. Ainsi, si X et Y sont négatifs le fluide chaud est ascendant et le fluide froid est descendant comme lorsque X et Y sont positifs. Nous pouvons donc dire que la physique est invariante sous le passage d'une configuration à l'autre, c'est à dire sous l'action de γ .

Dire que le système de Lorenz est équivariant signifie que son portrait de phase est invariant sous une symétrie, c'est à dire que l'image symétrique d'une orbite périodique est encore une orbite périodique de même période. La nouvelle orbite peut être distincte ou identique (à un décalage temporel près) à l'orbite originale. D'un point de vue global, l'espace des phases peut être complètement décomposé en régions images les unes des autres sous l'action de la matrice γ . Dans le cas du système de Lorenz, chacune de ces régions est associée à une aile qui définit un domaine fondamental.

Par la réduction de l'espace des phases à un domaine fondamental, la symétrie du système de Lorenz va nous permettre de simplifier sa caractérisation topologique. Mais nous devons auparavant construire une application de premier retour.

3.3.3 Application de premier retour

E. N. Lorenz [8] remarque que toute trajectoire quitte une aile pour l'autre lorsqu'elle est à une distance du centre de l'aile (le point fixe) qui excède une valeur critique. De plus, l'excédent par rapport à cette valeur critique détermine le point de réinjection dans la seconde aile et fixe ainsi le nombre de révolutions sur cette aile avant une nouvelle transition. Une portion de trajectoire sur une aile donnée permet alors de prédire le comportement qui se déroule sur l'autre aile.

Il observe un comportement analogue lorsqu'il étudie l'évolution du maximum de la variable Z . Il trace alors l'application $M_{n+1} = g(M_n)$ où M_n est la valeur du $n^{\text{ème}}$ maximum de la valeur Z . Cette application lui permet de réaliser une prédiction empirique de l'évolution de son système : toutefois celle-ci est limitée par la sensibilité aux conditions initiales des trajectoires. L'application obtenue par E. N. Lorenz est caractéristique de son système dans la mesure où elle reflète le comportement dynamique de celui-ci.

Nous avons vu au chapitre 1 qu'idéalement, une application de Poincaré se définit au voisinage d'une orbite périodique ζ d'un flot $\phi(t)$ plongé dans \mathbb{R}^n généré par un champ de vecteurs non-linéaire f . Une section $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ d'intersection locale, de dimension $n - 1$, constitue une hypersurface (pas nécessairement plane) qui est tel que le flot lui soit toujours transverse. Ceci est réalisé par la condition $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Sigma$, où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur unitaire normal à Σ en \mathbf{x} [20].

Les maxima de la variable Z définissent un tel ensemble Σ constitué de deux hypersurfaces Σ_+ et Σ_- définies respectivement par

$$\Sigma_+ = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z} = 0, \frac{\partial^2 \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z^2} < 0, X > 0, Y > 0 \right\} \quad (3.32)$$

et

$$\Sigma_- = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z} = 0, \frac{\partial^2 \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z^2} < 0, X < 0, Y < 0 \right\} \quad (3.33)$$

qui répondent aux critères d'une section de Poincaré définis précédemment. A ces deux hypersurfaces est intrinsèquement associée une direction d'intersection déterminée par le flot ϕ_t . Du point de vue de l'application de Lorenz, ces deux hypersurfaces ne sont pas distinguées l'une de l'autre. Ceci est une conséquence profonde de la nature de la symétrie du système ; la coordonnée Z est invariante sous l'action de la matrice γ . Ces deux hypersurfaces constituent ce que nous appellerons un ensemble de Poincaré : $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$. La nécessité d'un tel ensemble se justifie par les effets de la symétrie qui interdit de distinguer l'aile gauche de l'aile droite. Ainsi, une intersection avec Σ_+ ne doit pas être distinguée d'une intersection avec Σ_- . D'une certaine manière, l'ensemble de Poincaré Σ réduit les deux sections Σ_- et Σ_+ à une section fondamentale.

Les deux hypersurfaces Σ_+ et Σ_- sont respectivement équivalentes à deux plans P_{Y_+} et P_{Y_-} (fig. 3.5) définis respectivement par :

$$P_{Y_+} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Y = Y_+, \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Y} < 0 \right\} \quad (3.34)$$

et

$$P_{Y_-} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Y = Y_-, \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Y} > 0 \right\} \quad (3.35)$$

En effet, nous pouvons passer de Σ_+ (Σ_-) à P_{Y_+} (P_{Y_-}) sous l'action du flot ϕ_t qui définit ainsi une équivalence difféomorphique entre ces plans représentés figure 3.5.

La représentation de l'évolution de Z_{i+1} en fonction de Z_i où Z_i est la coordonnée en Z de la $i^{\text{ème}}$ intersection de la trajectoire avec l'ensemble de Poincaré $P_Y = P_{Y_+} \cup P_{Y_-}$ est représentée figure 3.6. L'application de premier retour de P_Y à lui-même est identique à celle obtenue par E. Lorenz [8]. Précisons que l'équivalence entre une application de premier retour dans un ensemble de Poincaré et une application de premier retour au maximum n'est assurée que dans certains cas particuliers où la topologie de l'attracteur l'autorise.

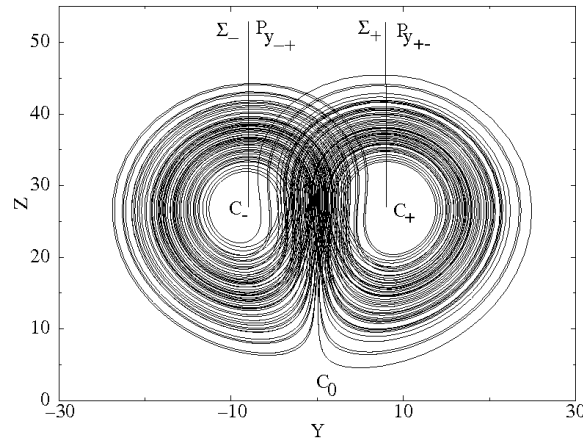


FIG. 3.5 – Projection de l'attracteur de Lorenz sur le plan YZ : équivalence des plans Σ_+ et Σ_- avec les plans P_{Y_+} et P_{Y_-} : les deux plans ne sont pas distinguables sur la figure.

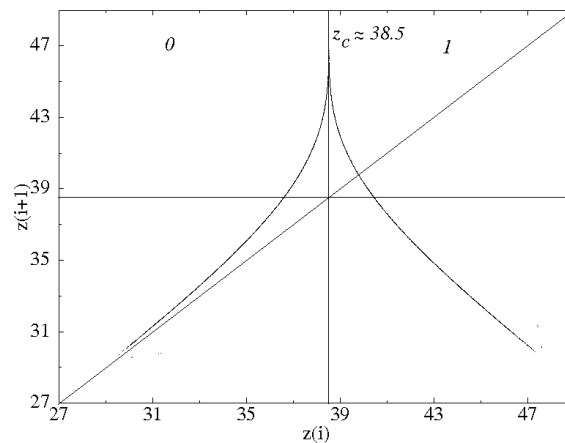


FIG. 3.6 – Application de premier retour dans l'ensemble $P_Y = P_{Y_+} \cup P_{Y_-}$

Pour $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ le point critique ($Z_c \approx 38.5$) de cette application correspond à la distance critique introduite par E. N. Lorenz au delà de laquelle la trajectoire passe d'une aile à l'autre. Ainsi toute trajectoire, dont l'intersection avec l'ensemble P_Y vérifie la condition $Z > Z_c$, passe d'une aile à l'autre. Au contraire si $Z < Z_c$, la trajectoire ne change pas d'aile. Nous sommes en présence de deux comportements dynamiques bien différents. Ces deux comportements vont correspondre à deux zones topologiquement distinctes. Nous allons voir comment les obtenir.

3.3.4 Partition de l'attracteur

Partition invariante

En 1979, J. S. Birman et R. F. Williams [21] introduisent une partition du masque de Lorenz (fig. 3.7) proposé par R. F. Williams [22] qui distingue les deux ailes. Elle est basée sur le segment $I = [\alpha, \beta]$ qui représente une coupe du semi-flot L associé à ce masque. L'étude de J. S. Birman et R. F. Williams est réalisée après l'explosion homocline autour de $R \approx 24.06$.

La partition est définie par

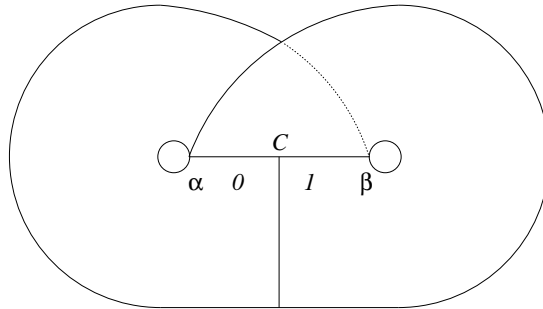


FIG. 3.7 – Masque de Lorenz pour $R = 24$: A chaque aile est associée une lettre de la dynamique symbolique.

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq X < 0 \\ C & \text{si } X = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < X \leq \beta \end{cases} \quad (3.36)$$

Cette partition revient à assigner à l'aile gauche la lettre 0 et à l'aile droite la lettre 1. Cette dynamique symbolique a connu un véritable engouement ; ainsi C. Sparrow [23] l'utilise pour coder les cycles limites du système de Lorenz. Plus récemment, V. Francheschini *et al* [25] utilisent cette partition pour coder les orbites périodiques du système de Lorenz pour $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$. C. Tresser et R. F. Williams [26] l'utilisent pour étudier les tresses présentes sur le masque de Lorenz.

G. B. Mindlin *et al* [27] utilisent aussi cette partition pour extraire le patron du système de Lorenz. Pour cela, ils construisent un double patron (fig. 3.8) directement à partir du masque de Lorenz (fig. 3.7).

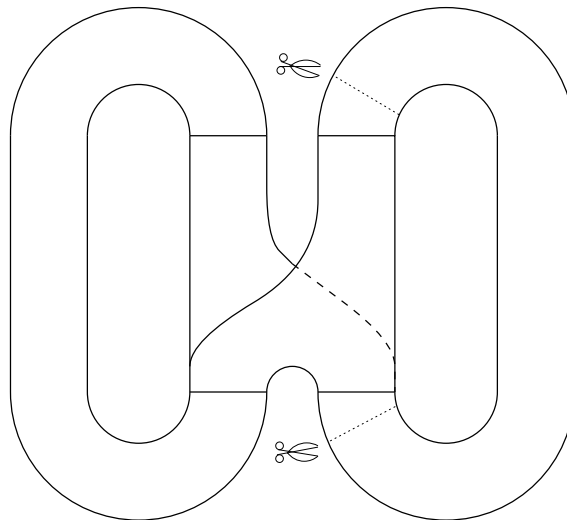


FIG. 3.8 – Double patron extrait du masque de Lorenz.

Afin de le réduire à un simple patron, ils effectuent un découpage d'une de ses ailes (suivant les pointillés représentés sur la figure 3.8) et la recollent sur l'autre (fig. 3.9.a). Le patron est alors achevé par unification des deux branches au niveau de la grande boucle (fig. 3.9.b).

La matrice de ce patron est alors :

$$M_{L_I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

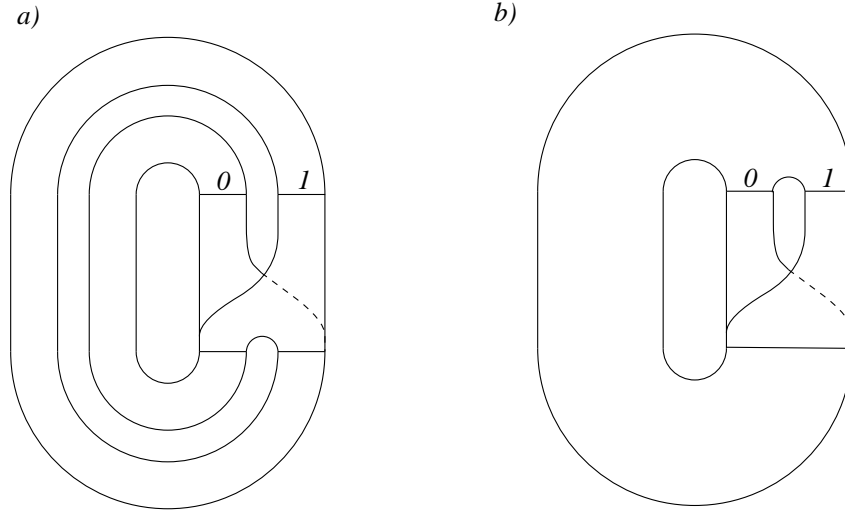


FIG. 3.9 – Simple patron obtenu à partir du masque de Lorenz par G. B. Mindlin et al.

A cette matrice est associée deux bandes de torsion locale nulle : de ce fait l'application de premier retour doit être antisymétrique comme l'a proposé Hao Bai Lin [28], c'est à dire qu'elle doit posséder deux branches monotones croissantes. Ceci est en contradiction avec l'application de premier retour obtenue précédemment (fig. 3.6).

Comme nous l'avons précisé, cette partition distingue les deux ailes et propose une description dynamique du système de Lorenz différente de celle donnée par son créateur (cf. section 3.2.3). Dans cette approche, c'est l'information sur l'aile visitée qui est importante : on distingue l'aile gauche de l'aile droite. Or, nous l'avons vu, c'est la transition d'une aile à l'autre qui constitue la seule information dynamique réellement pertinente. Or l'équivariance du champ de vecteurs et la symétrie du portrait de phases qui en découle impliquent l'existence d'un domaine fondamental permettant de paver l'espace des phases [3], c'est à dire un traitement identiques des deux ailes. Ceci n'apparaît pas dans la description de G. B. Mindlin *et al.*

Nous proposons maintenant une description tenant compte de l'équivariance du champ de vecteurs du système de Lorenz [24].

Partition équivariante

Nous partons nous aussi du masque de Lorenz (fig. 3.7) mais, de manière à prendre en compte les propriétés de symétrie de l'attracteur, nous réalisons une description symétrique des deux ailes. Chaque aile est divisée en deux régions. Nous obtenons alors un double patron pourvu de quatre bandes (fig. 3.10).

Suivant cette description, nous obtenons quatre lettres : $0, 1, \bar{0}$ et $\bar{1}$. Les lettres 0 et $\bar{0}$ correspondent à la réinjection de la trajectoire dans l'aile dont elle est issue. Les lettres 1 et $\bar{1}$ sont associées à la transition d'une aile à l'autre. Nous avons deux lettres pour chaque comportement dynamique.

Une aile étant copie de l'autre, les lettres 0 et $\bar{0}$ sont associées à des régions dont la topologie est identique. Aussi, une seule lettre 0 sera utilisée. Il en est de même pour les lettres 1 et $\bar{1}$. En effet, la symétrie du système de Lorenz étant du groupe Z_2 , le domaine fondamental est présent deux fois. Il est associé à une aile. Une conséquence de ce pavage est qu'une lettre de la dynamique symbolique peut correspondre à plusieurs régions de l'espace des phases, chacune de ces régions étant la copie d'une région du domaine fondamental.

Il nous reste alors à réduire le patron du portrait de phases au patron du domaine fondamental (une aile). Pour cela, isolons l'aile gauche du double patron (fig. 3.11.a).

Précisons que la matrice γ définit une rotation de $+\pi$ (en effet, afin de respecter la configuration de l'attracteur, la bande 1 doit être réinjectée au dessus de la bande 0). Ainsi, il suffit d'appliquer une rotation de $+\pi$ à la bande 1 pour la ramener dans le domaine fondamental (fig. 3.11.b).

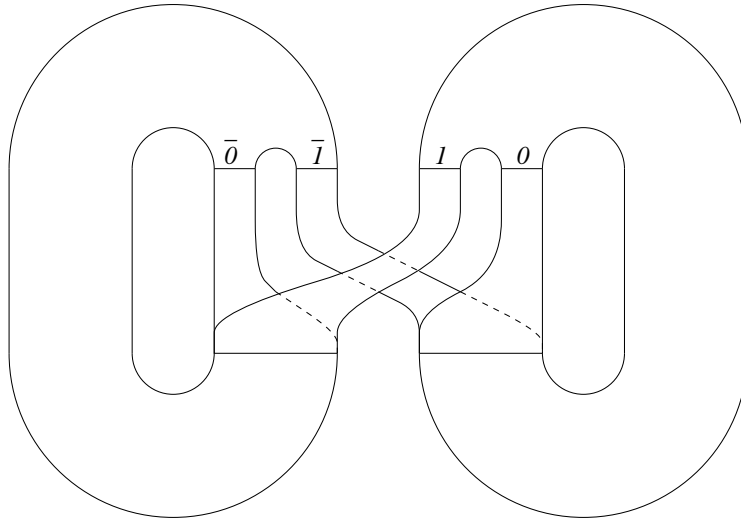


FIG. 3.10 – Double patron pourvu de quatre bandes : chaque aile est symétrique l'une de l'autre.

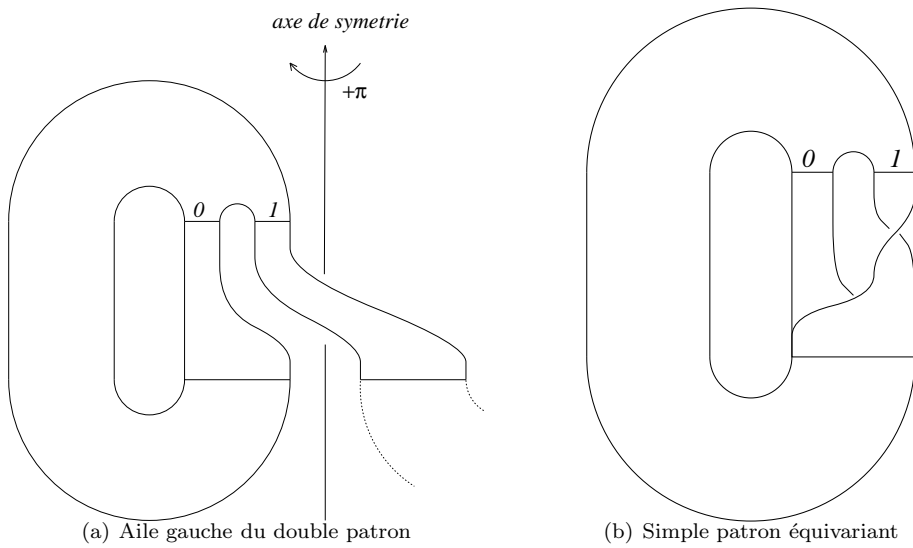


FIG. 3.11 – Réduction du double patron associé au système de Lorenz.

Nous obtenons alors un patron constitué d'une bande 0 dépourvue de torsion locale et une bande 1 pourvue d'une torsion locale $+\pi$. La matrice associée à ce patron s'écrit alors :

$$M_{L_E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Nous pouvons maintenant associer la bande 0 (torsion locale paire) à la branche monotone croissante de l'application de premier retour (fig. 3.6) et la bande 1 (torsion locale impaire) à la branche monotone décroissante. La description équivariante est donc en accord avec l'application de Poincaré proposée par E. N. Lorenz.

Les orbites périodiques vont maintenant être extraites et codées à l'aide de cette dynamique symbolique.

3.4 Population d'orbites périodiques

L' extraction des orbites périodiques se déroule suivant la méthode proposée par P. Dutertre [29] et utilisée sur le système de Rössler au chapitre précédent. La recherche s'effectue dans l'ensemble de Poincaré P_Y . Nous distinguerons auparavant les orbites symétriques et les orbites asymétriques.

3.4.1 Dégénérescence

Parce qu'à une lettre de la dynamique symbolique correspondent plusieurs régions distinctes de l'espace des phases, des orbites périodiques distinctes dans l'espace des phases vont être codées par la même séquence symbolique. De telles orbites sont dites dégénérées et sont images les unes des autres sous la transformation de symétrie. La dégénérescence dépend de la symétrie des orbites. En effet deux types d'orbites périodiques sont observées sur le système de Lorenz : les orbites symétriques et les orbites asymétriques.

Les orbites symétriques

Soit une orbite ζ définie par l'ensemble $\{x_\zeta(t), t \in [0, T_\zeta[]\}$ où T_ζ est la période temporelle de l'orbite ζ . On a évidemment $x_\zeta(0) = x_\zeta(T_\zeta)$.

Définition 1 : Une orbite ζ est dite symétrique si

$$\{x_\zeta(t), t \in [0, T_\zeta[]\} = \{\gamma x_\zeta(t), t \in [0, T_\zeta[]\},$$

c'est-à-dire si l'orbite ζ et son image $\gamma\zeta$ sont confondues à un décalage temporel près (soit $\gamma\zeta = \zeta$).

Dans le cas du système de Lorenz, ces orbites sont donc uniques. Une orbite symétrique est représentée figure 3.12.

Les orbites symétriques ne sont donc pas dégénérées. Du point de vue de la dynamique symbolique, ces orbites ont un comportement un peu particulier. En effet de telles orbites peuvent être décomposées de la manière suivante :

$$\{x_\zeta(t), t \in [0, T_\zeta[]\} = \left\{ x_\zeta(t), t \in \left[0, \frac{T_\zeta}{2} \left[\right] \right\} + \left\{ x_\zeta(t), t \in \left[\frac{T_\zeta}{2}, T_\zeta \left[\right] \right\}$$

Du point de vue de la dynamique symbolique, si la séquence symbolique associée à l'ensemble

$$\left\{ x_\zeta(t), t \in \left[0, \frac{T_\zeta}{2} \left[\right] \right\}$$

est par exemple $(1\bar{0}\bar{0})$, la séquence symbolique décrivant l'ensemble $\left\{ x_\zeta(t), t \in \left[\frac{T_\zeta}{2}, T_\zeta \left[\right] \right\}$ sera $\tilde{\gamma}(1\bar{0}\bar{0}) = (\bar{1}00)$.

La séquence de l'orbite ζ est donc $(100\ 100)$. Cela veut dire que lorsque l'orbite périodique ζ est réduite sur le domaine fondamental, l'orbite réduite est décrite deux fois. La période n'est donc pas de 6 (dans notre exemple) mais de 3... ! Il en est ainsi pour toutes les orbites périodiques symétriques du système de Lorenz : leur période sur le domaine fondamental est égale à la moitié de celle apparaissant sur l'ensemble de l'espace des phases.

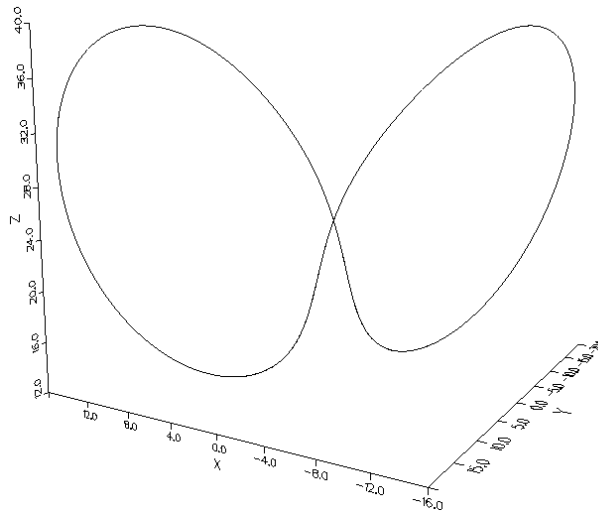


FIG. 3.12 – Orbite symétrique du système de Lorenz.

Les orbites asymétriques

Soit une orbite ξ définie par l'ensemble $\{x_\xi(t), t \in [0, T_\xi]\}$ où T_ξ est la période temporelle de l'orbite ξ . On a évidemment $x_\xi(0) = x_\xi(T_\xi)$.

Définition 2 : Une orbite ξ est dite asymétrique si

$$\{x_\xi(t), t \in [0, T_\xi]\} \cap \{\gamma x_\xi(t), t \in [0, T_\xi]\} = \emptyset$$

c'est-à-dire si il n'existe aucun point commun entre l'orbite ξ et son image $\gamma\xi$.

Dans le cas du système de Lorenz, ces orbites apparaissent par paire (car $\gamma^2 = I$). Une paire d'orbites asymétriques est représentée figure 3.13.

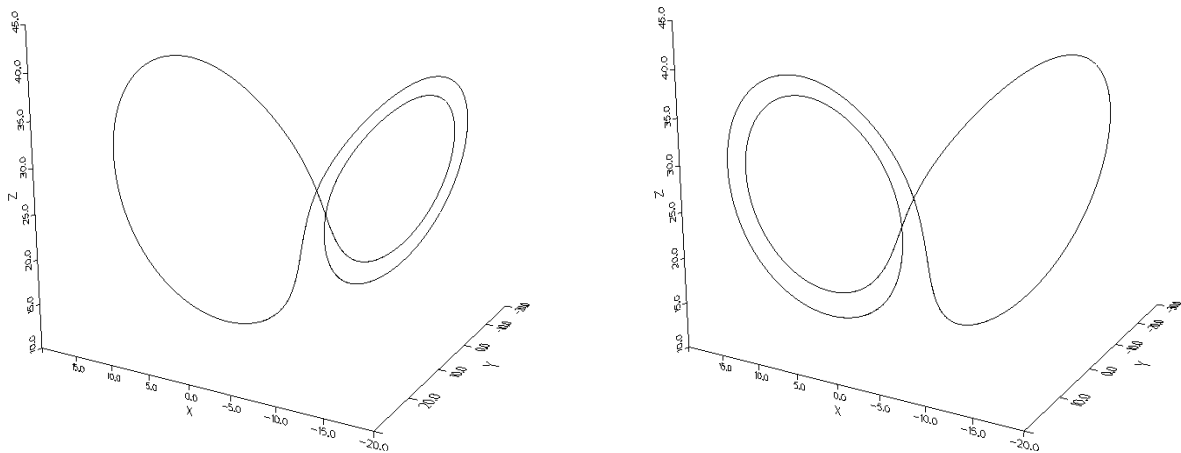


FIG. 3.13 – Paire d'orbites asymétriques

Ainsi les orbites périodiques asymétriques du système de Lorenz sont dégénérées deux fois. Chacune est codée par la même séquence symbolique. En effet, supposons que l'orbite ξ soit codée par la séquence symbolique $(10\bar{1})$.

Son image sera codée par la séquence $\tilde{\gamma}(\overline{10\bar{1}}) = (\overline{101})$ où $\tilde{\gamma}$ est l'opérateur équivariant agissant sur les éléments de la dynamique symbolique. Les deux lettres $\bar{0}$ et $\bar{1}$ étant respectivement équivalentes aux lettres 0 et 1, la séquence symbolique réduite au domaine fondamental est (101).

Du point de vue de la dynamique ou, de manière équivalente, de la topologie, ces deux orbites périodiques sont indiscernables.

Nous avons donc vu que la dégénérescence d'une orbite périodique dépend de sa symétrie : une orbite asymétrique est dégénérée deux fois alors qu'une orbite symétrique ne l'est pas. D'autre part, les orbites symétriques ont une période égale à deux fois la fois la période de l'orbite correspondante sur le domaine fondamental.

3.4.2 Population d'orbites périodiques

Rappelons la partition donnée par l'application de Poincaré sur l'ensemble P_Y :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } Z < Z_c \\ C & \text{si } Z = Z_c \\ 1 & \text{si } Z > Z_c \end{cases} \quad (3.39)$$

où $Z_c \approx 38.5$. Les orbites périodiques ont été extraites et codées à l'aide de la partition précédente. La population est reportée dans le tableau 3.2. Un seul point périodique de chaque orbite est donné : c'est le point le plus à droite de l'application de premier retour (fig. 3.6), c'est à dire le point périodique le plus à la périphérie de l'attracteur. L'attracteur se développant par sa frontière périphérique, classer ces points périphériques par coordonnées croissantes revient à les classer par ordre d'apparition sur l'attracteur sous une variation du paramètre de contrôle.

Au sein de ce tableau, nous constatons qu'il manque l'orbite périodique codée par la séquence (0). En effet cette orbite, née lors de l'apparition des premières instabilités lorsque $R > 1$, est détruite par une bifurcation inverse de Hopf à $R_H = 24.74$ [18]. Sinon, et ce jusqu'à la période 7, toutes les orbites périodiques prédites par la dynamique symbolique binaire sont présentes sur l'attracteur. Pour une période p donnée, ce nombre est obtenu par la relation suivante [29] :

$$N_p = \frac{2^p - \sum_{i/\text{mod}(p,i)=0} i < p \ i N_i}{p} \quad (3.40)$$

où i est un entier diviseur de la période p . La population d'orbites périodiques se répartit comme indiqué Tab. 3.1.

TAB. 3.1 – Répartition de la population d'orbites périodiques en fonction de la période p .

p	1	2	3	4	5	6	7
N_p	2	1	2	3	6	9	18

La route vers le chaos et le processus d'apparition des orbites périodiques du système de Lorenz ne sont pas encore clairement compris. Nous pouvons seulement dire que la naissance de l'attracteur chaotique de Lorenz ($R = 28$) résulte d'une série d'orbites homoclines (la première apparaît pour $R \approx 13.926$) et d'une bifurcation de Hopf ($R_H \approx 24.74$).

Cependant les travaux de C. Sparrow [23] permettent d'en savoir un peu plus. Ainsi, lorsque $22.4 < R < R_A \approx 24.06$, un chaos métastable apparaît dans le régime transitoire menant à l'un des deux points fixes C_{\pm} . C. Sparrow étudie alors l'évolution du nombre maximum N_m de révolutions consécutives sur une aile, c'est à dire,

suisant notre dynamique symbolique, la suite de 0 la plus longue apparaissant dans les séquences symboliques des orbites périodiques. Il observe que pour $R = R_A$, cette suite est infinie. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la séquence infinie $(0)^\infty$ est la dernière à apparaître au sein d'une dynamique symbolique associée à une application de premier retour constituée d'une branche monotone croissante et d'une branche monotone décroissante. Nous pouvons alors dire que la dynamique symbolique est complète pour $R = R_A$, c'est à dire qu'à chaque séquence symbolique peut être associée une orbite périodique sur l'attracteur. Au delà de $R = R_A$, le nombre N_m décroît sur l'intervalle $R_A < R < 28$ pour atteindre la valeur $N_m = 24$ pour $R = 28$ [23]. Ainsi, pour $R = 28$, aucune séquence symbolique ne peut contenir une suite de 25 symboles 0. L'élagage se réalise donc par le voisinage du point fixe (comme pour le système de Rössler) et c'est le nombre N_m qui le pilote.

Aucune orbite de période inférieure à 25 ne peut donc être élaguée. Les orbites homoclines responsables de cet élagage ne peuvent donc être détectées dans la population que nous avons extraite (tableau 3.2). La caractérisation topologique que nous allons donner pour $R = 28$ s'étend ainsi sur l'intervalle $22.4 < R < R_3 \approx 35$ où R_3 est la valeur de R pour laquelle une troisième branche apparaît sur l'application de premier retour.

Les études numériques de C. Sparrow indiquent que l'entier N_m subit une décroissance monotone sur $R_A < R < 28$. Cependant, pour des valeurs de R supérieures à 28, le développement de l'attracteur s'inverse. Ainsi, pour $R = 30.2$, $N_m = 33$. Puis pour $R > 30.2$, N_m décroît jusqu'à atteindre la valeur $N_m = 2$ pour R proche de 47.5 où une orbite homocline (100) apparaît. Pour $R \approx 54.6$, l'orbite homocline (10) survient impliquant $N_m = 1$. Nous n'avons pas poursuivi l'étude de C. Sparrow au delà.

Précisons enfin que les orbites symétriques sont impaires et que les orbites asymétriques sont paires. En effet, une orbite périodique symétrique issue des conditions initiales (X_0, Y_0, Z_0) est telle qu'elle visite le point $(-X_0, -Y_0, Z_0)$ après avoir décrit sa séquence symbolique. Autrement dit, si elle est issue de l'aile gauche, elle se retrouve dans l'aile droite et vice versa. Elle effectue un nombre impair de transitions d'une aile à l'autre. Seule la lettre 1 étant associée à une transition, la séquence symbolique d'une orbite périodique symétrique contient donc un nombre impair de lettre 1 : l'orbite est donc impaire. Au contraire une orbite asymétrique est paire.

La connaissance de la population d'orbites périodiques va maintenant nous permettre de vérifier le patron proposé par le calcul des nombres de liaisons sur une projection régulière d'une paire d'orbites périodiques.

3.4.3 Vérification du patron

La procédure de vérification du patron est constituée de deux étapes. La projection d'une paire d'orbites de faible période sur un plan régulier (qui ne contient pas de croisements mettant en jeu plus de deux segments d'orbites) est réalisée et le décompte des intersections orientées effectué. Ensuite le nombre de liaisons obtenu est comparé au nombre de liaisons prédit par le patron.

Nombre de liaisons d'un système symétrique

Pour un système dépourvu de symétrie, le nombre de liaisons entre deux orbites N_1 et N_2 est égal à la demi-somme des intersections orientées. Pour un système possédant une symétrie, le problème n'est pas aussi simple. En effet nous devons travailler sur un domaine fondamental afin d'obtenir une représentation correcte de la dynamique. Si cette restriction au domaine fondamental ne pose aucune difficulté pour le cas des orbites symétriques (leur symétrie leur impose de se développer de façon identique sur le domaine fondamental et chacune de ses copies), la réduction au domaine fondamental des orbites asymétriques est plus délicate car elles se développent différemment sur le domaine fondamental et sa copie. De manière à récupérer toute l'information sur le domaine fondamental (une aile), nous utilisons la projection de la paire d'orbites asymétriques. Les orbites asymétriques sont donc deux fois présentes sur la projection. Rappelons maintenant que les orbites symétriques décrivent deux fois leur séquence symbolique, elles sont donc, elles aussi, deux fois présentes sur la projection. De ce fait, chaque intersection entre deux orbites N_1 et N_2 quelconques est présente deux fois sur la projection utilisée.

Le nombre de liaisons $L(N_1, N_2)$ entre les deux orbites N_1 et N_2 est donc égal à :

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{4} \sum_p \sigma_{12}(p) \quad (3.41)$$

TAB. 3.2 – Population d'orbites périodiques de l'attracteur de Lorenz pour $R = 28$: $Z = R - 1 = 27$

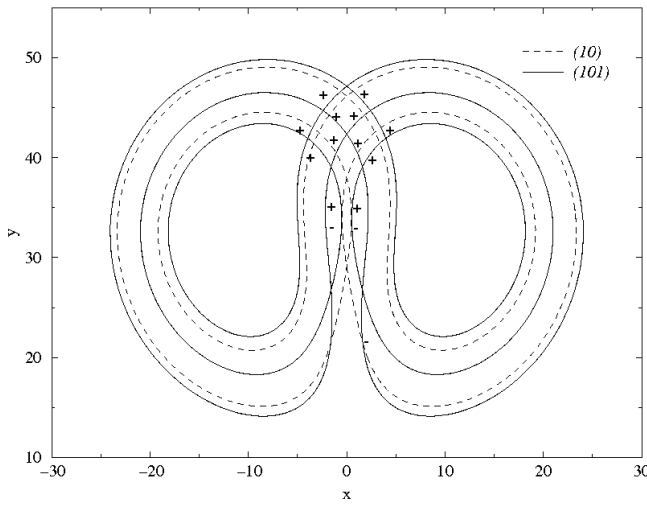
période	nombre	coordonnée en X	coordonnée en Y	séquence
1	1	14.2522065229075	39.7867245557628	1
2	1	14.7951769528952	40.9221648730683	10
3	2	15.0378085672956	41.4299223274386	101
		15.2525741900232	41.8793281783582	100
4	3	14.9014053465600	41.1445542869137	1011
		15.5333228010990	42.4674009054383	1001
		15.6325217983120	42.6752843547410	1000
5	6	14.9570960493399	41.2610562581815	10111
		15.0045396304132	41.3601910034850	10110
		15.3339887740149	42.0497991445220	10010
		15.3800026295199	42.1462162629907	10011
		15.9009962294797	43.2384692343331	10001
		15.9506406339437	43.3426767000909	10000
6	9	14.9080697447421	41.1583442728562	101110
		14.9301766188238	41.2047410000841	101111
		15.2767001944811	41.9299072293076	100101
		15.4438112202875	42.2798646308593	100111
		15.4650080247364	42.3242267651286	100110
		15.7335115409141	42.8870455735786	100010
		15.7556674190500	42.9335348447330	100011
		16.1947710017620	43.8556077733616	100001
		16.2208644569255	43.9104704676447	100000
7	18	14.9422872802413	41.2300761367168	1011111
		14.9524784956985	41.2512584982527	1011110
		15.0111478727811	41.3740186539534	1011010
		15.0217932032591	41.3964130948526	1011011
		15.3026124353992	41.9841592585449	1001011
		15.3130845099294	42.0060246273502	1001010
		15.4034466786862	42.1952679567950	1001110
		15.4131943204163	42.2157331064021	1001111
		15.5010105784521	42.3996960317227	1001101
		15.5121509402480	42.4230008978666	1001100
		15.6662631212589	42.7460245727538	1000100
		15.6776819975134	42.7699906303591	1000101
		15.8164912332924	43.0611310681897	1000111
		15.8268752708803	43.0829030721697	1000110
		16.0514736994975	43.5544439668688	1000010
		16.0628375423665	43.5783243169851	1000011
16.4396691577596	44.3709166248524	1000001		
16.4538203987959	44.4007175101430	1000000		

où p désigne un croisement entre l'orbite N_1 et l'orbite N_2 .

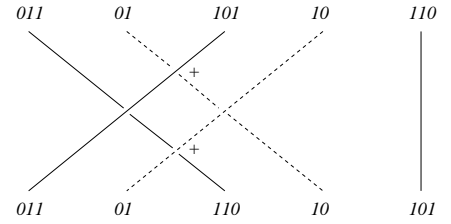
Vérification

Prenons la paire (101, 10). L'orbite (101) est paire, elle est donc asymétrique. Nous utiliserons donc la paire d'orbites associée à cette séquence symbolique. L'orbite (10) est impaire, elle est donc symétrique. La projection de ce couple d'orbites (fig. 3.14.a) présente douze intersections positives et quatre négatives. Le nombre $L(101, 10)$ vaut donc :

$$L(101, 10) = \frac{1}{4}(12 - 4) = +2$$



(a) Projection du couple (101, 10)



(b) Graphe d'insertion : $N_{ins}(101, 10) = 2$

FIG. 3.14 – Calcul du nombre de liaisons : $L(101, 10) = \frac{1}{4}(12 - 4) = 2$. La base supérieure du graphe d'insertion est obtenue par une simple inversion de la bande 1.

Rappelons la relation obtenue au chapitre précédent permettant le calcul du nombre de liaisons entre deux orbites N_1 et N_2 à partir de la matrice du patron et de la dynamique symbolique :

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} M(\sigma_i, \tau_j) + N_{ins}(N_1, N_2) \right] \tag{3.42}$$

où σ_i et τ_j représentent les lettres de la séquence symbolique associée respectivement à l'orbite N_1 et N_2 de périodes respectives p_1 et p_2 . A l'aide de cette relation et de la matrice du patron (3.38), nous obtenons :

$$\begin{aligned} L(101, 10) &= \frac{1}{2} [2M(1, 1) + 3M(1, 0) + M(0, 0) + N_{ins}(101, 10)] \\ &= \frac{1}{2} [2 + 0 + 0 + 2] = 2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

où $N_{ins}(101, 10)$ est construit selon les règles 2.1 et 2.2 du chapitre précédent ($N_{ins}(101, 10) = 2$, fig. 3.14.b).

Le patron est donc validé. Nous avons donc construit une dynamique symbolique capable de coder toutes les orbites périodiques jusqu'à la période 7 (soit 40 orbites) sans aucune ambiguïté. Nous retrouvons la même population que V. Franceschini *et al* [25] qui utilisent la même partition que G. B. Mindlin *et al*. Toutefois, notre analyse tient compte de l'équivariance du système, ce qui aura de profonde conséquences pour une analyse plus globale de la dynamique (par transformée de Fourier, voir section 3.6). Il reste cependant à élucider le cas de plus grandes valeurs du paramètre R . En effet pour $R = 60$, V. Franceschini *et al* ne peuvent coder toutes les orbites périodiques sur une dynamique symbolique binaire.

3.5 Dynamique symbolique à trois lettres

En augmentant le paramètre de contrôle, le chaos se développe. De nouvelles branches monotones apparaissent sur l'application de premier retour (fig. 3.16). Le patron à trois bandes sera extrait et validé. L'attracteur correspondant est représenté figure 3.15.

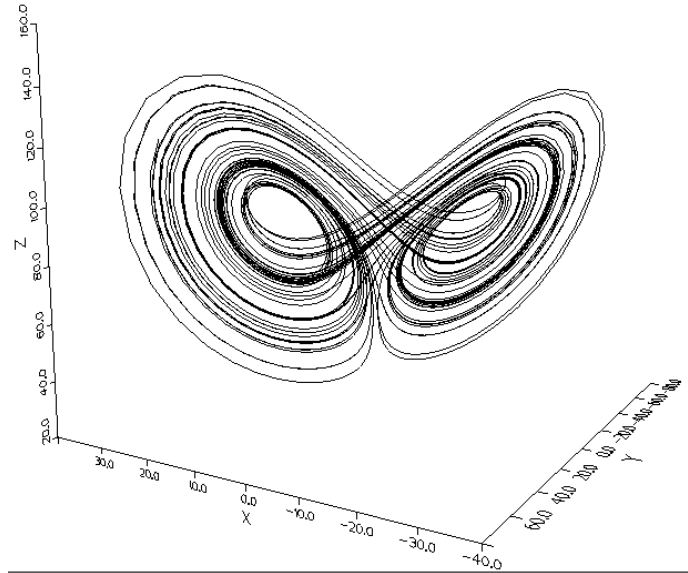


FIG. 3.15 – Attracteur solution du système de Lorenz pour $R = 90$.

3.5.1 Application de premier retour

L'application de premier retour est tout d'abord construite sur l'ensemble de Poincaré P_Y avec la variable Z . Cette application présente une troisième branche monotone qui est croissante (fig. 3.16.a). Malheureusement, nous observons un dédoublement des deux premières branches : deux points critiques, Z_{1c} et Z_{2c} , apparaissent entre ses deux branches. Nous ne pouvons donc statuer sur l'intervalle $[Z_{1c}, Z_{2c}]$. Ce dédoublement est une conséquence du dédoublement de la section de Poincaré (fig. 3.16.b) provoqué par le développement de la variété stable hors des plans contenant les deux ailes [31] (fig. 3.16.c). Plus une trajectoire se situe à la périphérie d'une aile (gris foncé sur la figure 3.16.c) plus elle subit l'influence de la variété stable (gris clair) : de ce fait elle va avoir tendance à quitter le plan de l'aile et à s'enrouler sur la variété stable hors du plan des ailes.

Ce dédoublement peut être réduit par l'utilisation d'une variable W construite à partir des variables X et Z suivant la relation :

$$W = |X| + 2.8Z \quad (3.44)$$

où 2.8 est un facteur empirique. La valeur absolue de la variable X (équivalente) est utilisée afin d'obtenir une variable W invariante comme l'est la variable Z . Ceci est imposé par la réduction au domaine fondamental que constitue une aile.

L'application de premier retour alors obtenue (fig. 3.17) ne présente plus aucune ambiguïté entre les deux premières branches. Un léger dédoublement, inessentiel pour la partition, persiste sur la deuxième branche. La partition de l'attracteur est alors la suivante :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } W < W_{1c} \\ 1 & \text{si } W_{1c} < W < W_{2c} \\ 2 & \text{si } W_{2c} < W \end{cases} \quad (3.45)$$

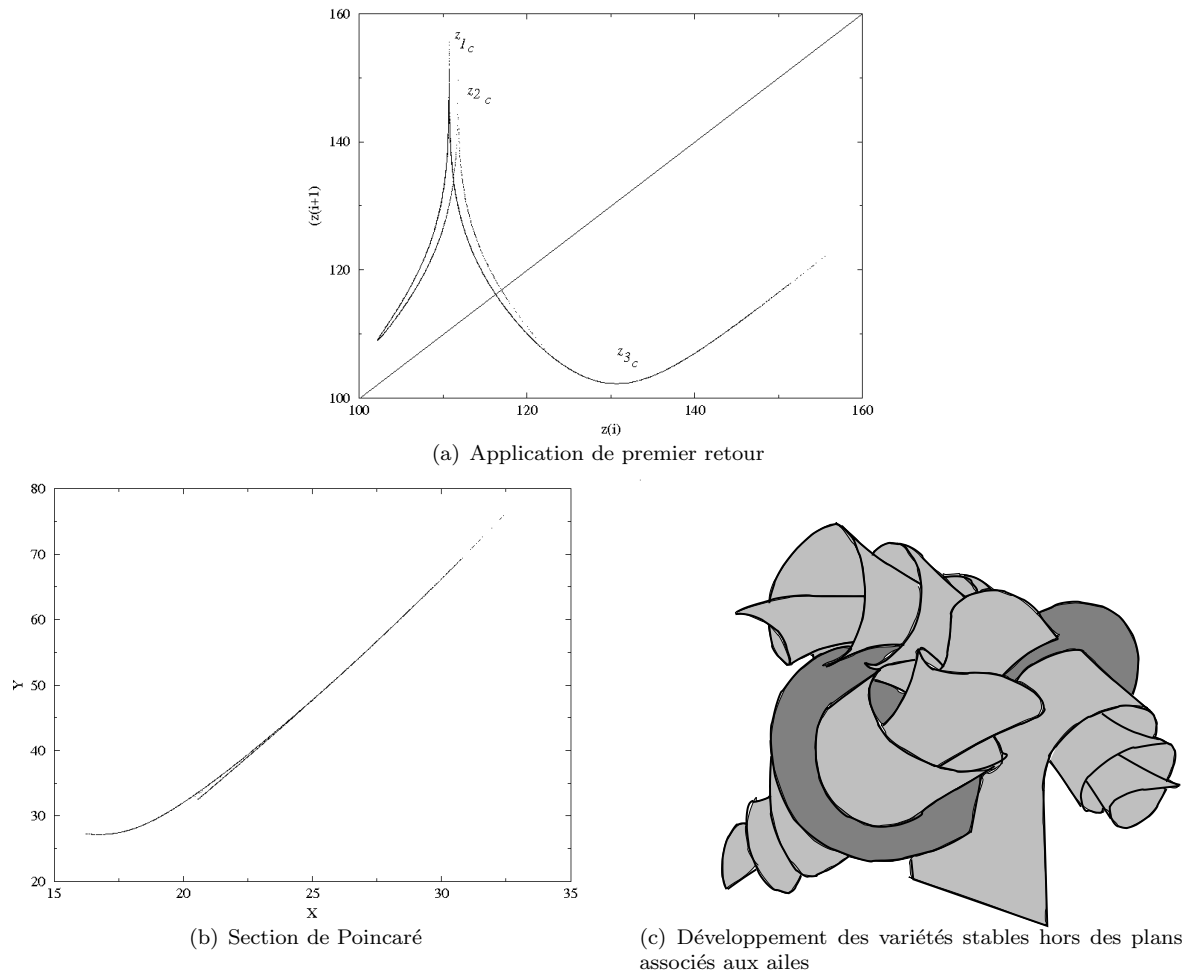


FIG. 3.16 – Dédoubllement de la section de Poincaré du système de Lorenz $R = 90$.

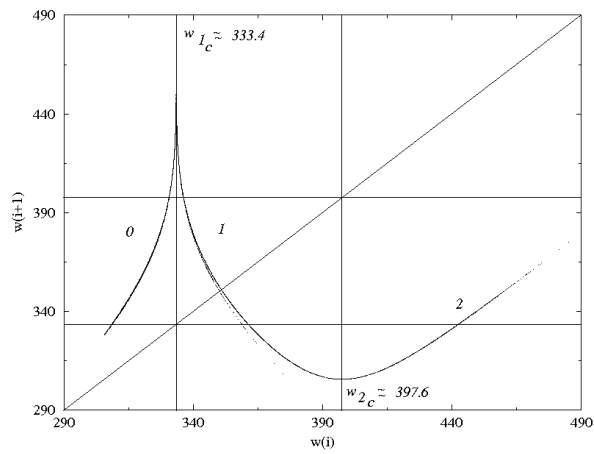


FIG. 3.17 – Application de premier retour construite avec la variable W : le dédoublement des deux premières branches a pratiquement disparu.

La population d'orbites périodiques est alors extraite et codée à l'aide de cette dynamique symbolique. Précisons que la troisième branche monotone étant croissante, la lettre 2 est paire. Mais auparavant, dressons le patron.

3.5.2 Caractérisation topologique

Le patron

Comme pour le cas à deux lettres, le patron est extrait à partir d'un masque construit directement sur l'attracteur à l'aide de la partition ci-dessus. En accord avec l'application de premier retour à trois branches, le masque obtenu comporte trois bandes par aile (fig. 3.18).

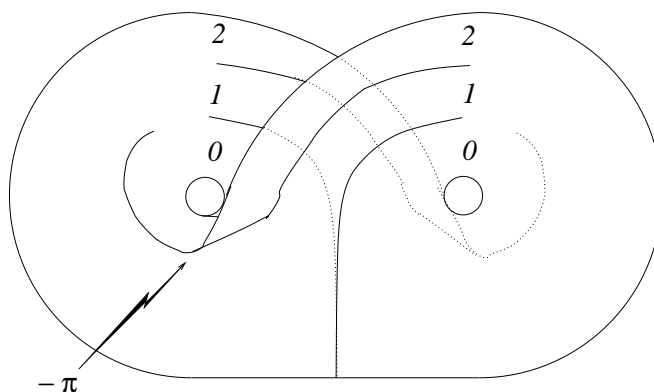


FIG. 3.18 – Masque de Lorenz pour $R = 90$: la lettre 2 est pourvue d'une torsion locale de $-\pi$.

Selon la proposition de P. Kent et J. Elgin [32] (section 2.4.1), les bandes 0 et 1 sont identiques à celles présentes pour $R = 28$: en effet, hormis les éventuelles orbites homoclines qui impliquent un élagage des orbites mises en jeu (cf. chapitre 2), aucune bifurcation entre les orbites de faible période de ces branches n'apparaît sur la plage $28 < R < 90$. La bande 2 est particulière car avant sa réinjection dans le plan de l'aile, elle subit une torsion locale de $-\pi$ (fig. 3.18). Le double patron à six bandes est donc obtenu (fig. 3.19).

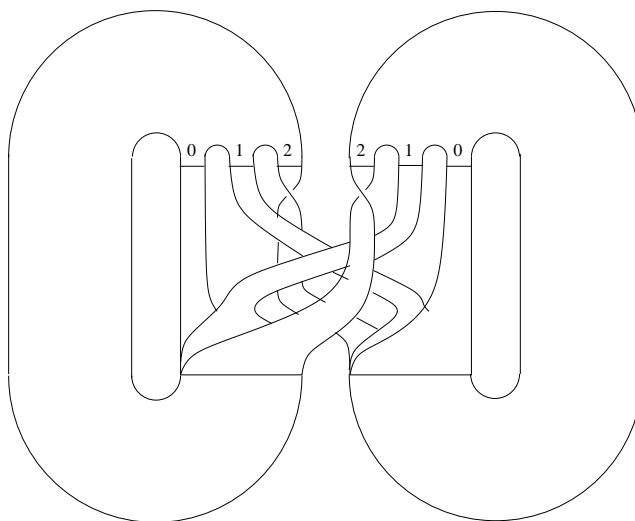


FIG. 3.19 – Double patron à six bandes du système de Lorenz ($R = 90$) : la bande 2 présente une torsion locale égale à $-\pi$.

Nous procédons maintenant à la réduction de ce patron à un domaine fondamental (une aile). Choisissons l'aile gauche. Les trois bandes issues de cette aile doivent donc être réinjectées sur celle-ci. Ceci est automatiquement réalisé pour la bande 0. Les bandes 1 et 2 sont réinjectées sur cette aile par action de la matrice γ , c'est à dire par l'adjonction d'une rotation de $+\pi$: la bande 1 se retrouve avec une torsion locale de $+\pi$ et la bande 2 avec une torsion locale nulle ($-\pi + \pi = 0$) retrouvant ainsi une parité paire en accord avec l'application de premier retour.

Le patron ainsi construit est représenté figure 3.20. La matrice qui lui est associée s'écrit :

$$M_{L_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

La population d'orbites périodiques va maintenant être extraite.

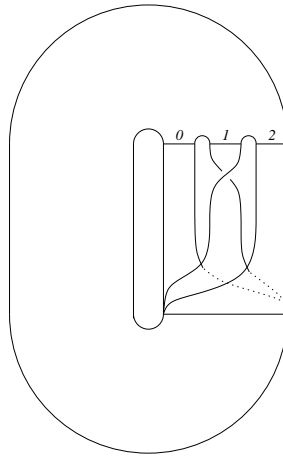


FIG. 3.20 – Patron à trois bandes du système de Lorenz ($R = 90$).

3.5.3 Population d'orbites périodiques

Il existe toujours des orbites périodiques symétriques et asymétriques. Pourtant, la symétrie d'une orbite ne peut plus se déterminer sur sa parité comme pour le cas à deux lettres. En effet nous avons vu que c'est dans la transition d'une aile à l'autre que réside la clef de la symétrie d'une orbite. Pour la lettre 2, il n'y a plus correspondance entre transition et parité. En effet, à la lettre 2 est associée une transition d'une aile à l'autre comme pour la lettre 1.

Cependant, nous pouvons construire un opérateur de transition T agissant sur les lettres de la dynamique symbolique de la manière suivante :

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 1 \end{cases} \quad (3.47)$$

c'est-à-dire que la valeur $T(\sigma_i)$ vaut 1 si la lettre σ_i est associée à une transition d'une aile à l'autre et 0 sinon. Il vérifie la propriété suivante :

$$T(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) = T(\sigma_1) + T(\sigma_2) + \dots + T(\sigma_p)$$

où $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ est la séquence symbolique d'une orbite ζ de période p . Ainsi une orbite ζ est symétrique si $T(\zeta)$ est impair et asymétrique si $T(\zeta)$ est pair. Par exemple

$$\begin{aligned} T(201) &= T(2) + T(0) + T(1) \\ &= 1 + 0 + 1 = 2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

L'orbite (201) est donc asymétrique : la paire correspondante est représentée figure 3.21.

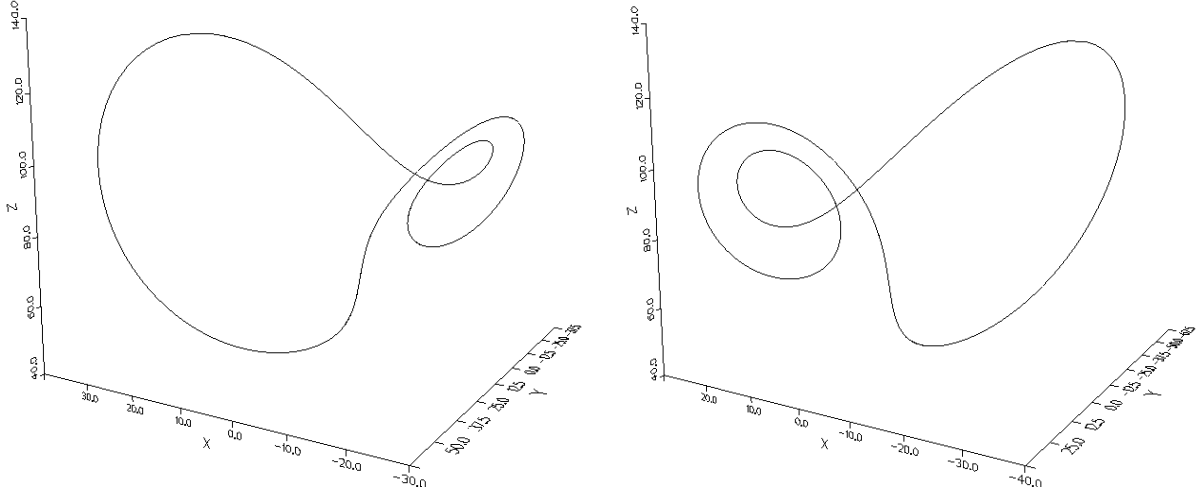


FIG. 3.21 – Couple d'orbites asymétriques codées par la séquence (210).

La population d'orbites périodiques est répertoriée dans le tableau 3.3. Parmi cette population, certaines syllabes (suites de plusieurs lettres) sont absentes. Ainsi, comme l'avait indiqué C. Sparrow [23], le nombre N_m est très faible (égal à 2). Il semble que sur l'intervalle $54.6 < R < 90$, N_m a, à nouveau, subi une croissance : en effet, $N_m = 1$ pour $R \approx 54.6$ alors que $N_m = 2$ pour $R \approx 90$ (aucune syllabe de plus de deux 0 n'apparaît au sein de la population d'orbites périodiques). La dynamique symbolique est donc élarguée. Cela se traduit par une croissance de la zone lacunaire au voisinage des points fixes C_+ et C_- , en d'autres termes, le "trou" au centre des ailes s'agrandit !

Précisons qu'aucune ambiguïté n'a été rencontrée lors de la codification des orbites périodiques. La partition choisie est donc génératrice (une séquence pour une orbite périodique). La vérification du patron va maintenant être effectuée.

3.5.4 Vérification du patron

La vérification est réalisée à l'aide du couple (21, 10). A l'aide de l'opérateur de transition T , la symétrie des orbites est obtenue :

$$\begin{cases} T(21) = T(2) + T(1) = 2 \\ T(10) = T(1) + T(0) = 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

L'orbite (21) est donc asymétrique ($T(21)$ pair) et l'orbite (10) symétrique ($T(10)$ impair). Ces deux orbites sont projetées sur le plan XY (fig. 3.22). Elles présentent 6 intersections positives et 2 intersections négatives. Le nombre de liaisons $L(21, 10)$ vaut donc :

$$L(21, 10) = \frac{1}{4} [6 - 2] = 1 \quad (3.50)$$

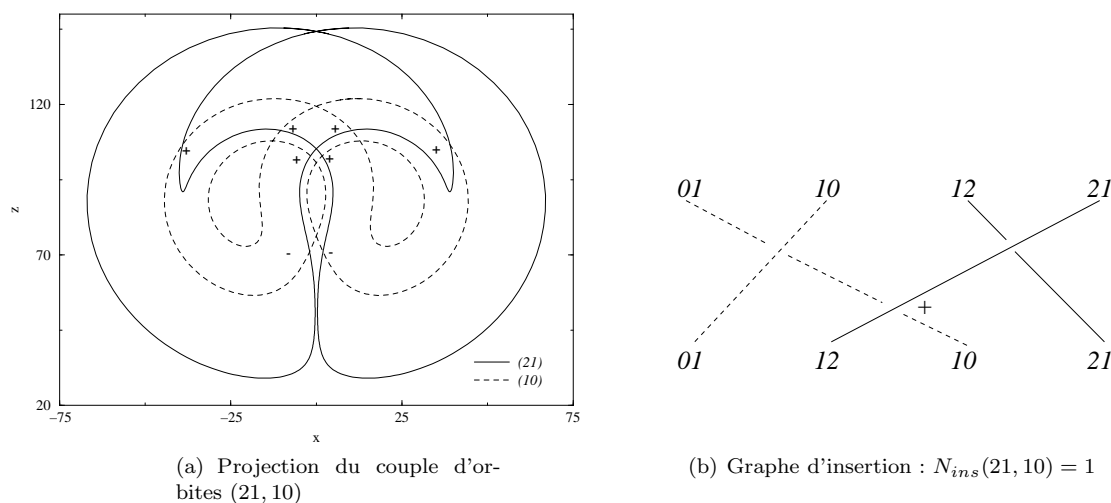
La relation (3.42) permet de calculer directement ce nombre à partir de la matrice du patron et de la dynamique symbolique. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} L(21, 10) &= \frac{1}{2} [M(2, 1) + M(2, 0) + M(1, 1) + M(1, 0) + N_{ins}(21, 10)] \\ &= \frac{1}{2} [0 + 0 + 1 + 0 + 1] = 1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Le nombre prédit par le patron est en accord avec celui calculé sur la projection. Le patron est donc validé.

période	nombre	coordonnée en x	coordonnée en z	séquence
1	1	25.478207324154685	116.23459080526681	1
2	3	27.570304253868592	121.77894014726495	10
		35.818977618411665	145.23543324257088	20
		35.841956441468398	145.30401939870268	21
3	4	29.001297921366326	125.72437276449841	101
		30.169353523091409	128.94652544285941	100
		32.071961450234518	134.31230268147127	200
		32.444805646181500	135.37873779299628	201
4	6	28.039813520502324	123.09640175162681	1011
		34.361124197001246	140.92600017444059	2011
		34.385382432962039	140.99687337118553	2010
		35.822138123959327	145.24489523835774	2120
		37.181197281787277	149.33489616355573	2110
		37.182519061358910	149.33891906126050	2111
5	13	28.423588279617911	124.14189375440889	10111
		28.680471724880737	124.82017787583088	10110
		33.457830365349188	138.29438744751161	20110
		33.485708693880781	138.37569942081269	20111
		35.269747758336663	143.60263822581839	20101
		35.278512469258204	143.62853362619259	20100
		35.672644971803456	144.79928004898089	20200
		35.675318134657114	144.80728736122968	20201
		35.985001033379584	145.73128466229388	21201
		35.986955790743373	145.73710772710779	21200
		36.371054542278677	146.88827940568438	21100
		36.373903419227726	146.89683481065490	21101
		37.891334175997994	151.50055008378002	21111

TAB. 3.3 – Population d'orbites périodiques de l'attracteur de Lorenz pour $R = 90$: $Z = R - 1 = 89$

FIG. 3.22 – Calcul du nombre de liaisons $L(21, 10)$.

Avec notre dynamique symbolique ternaire, nous avons codé sans ambiguïté toutes les orbites de période inférieure ou égale à 5 (soit 27 orbites). Nos résultats confirment ce qu'avait avancé V. Franceschini *et al* [25], c'est à dire que pour les grandes valeurs de R , une dynamique symbolique binaire est insuffisante. La description équivariante, par une réduction du portrait de phases à un domaine fondamental, révèle ici toute sa puissance.

Toutefois, les capacités d'un tel formalisme ne se limite pas à la description des orbites périodiques. Toute étude dynamique doit être réalisée avec une efficacité accrue sur le domaine fondamental. Nous en donnerons un exemple avec le spectre de puissance.

3.6 Spectres de puissance

Edward Lorenz intitule son article présentant ce qui est désormais connu comme le premier exemple d'attracteur étrange : *flot déterministe apériodique*. L'apériodicité se traduit par une large bande dans le spectre de puissance. Celle-ci est généralement l'une des caractéristiques du chaos. En principe les systèmes périodiques ou quasi-périodiques ont un spectre de puissance constitué de pics. Ainsi, tout système dynamique déterministe dont le spectre n'est pas composé de pics est, en principe, chaotique.

Cependant, certains attracteurs étranges ont des spectres de puissance superposants des pics et une large bande. De tels attracteurs possèdent une propriété de cohérence de phase.

3.6.1 La cohérence de phase

L'existence de pics dans le spectre de puissance d'une série temporelle $x(t)$ et la linéarité de la transformée de Fourier impliquent que la série $x(t)$ peut être écrite comme la somme d'une composante périodique et d'une composante apériodique :

$$x(t) = x_p(t) + x_{ap}(t) \quad (3.52)$$

Ainsi la fonction d'autocorrélation peut être écrite comme la somme d'une composante tendant vers 0 et d'une composante périodique qui ne décroît pas vers 0.

Pour les signaux de la forme de l'équation (3.52), la composante apériodique introduit une incertitude sur la mesure du temps d'un cycle de la composante périodique (soit une révolution sur l'attracteur). Cette incertitude est égale à l'incertitude de mesure du temps de plusieurs cycles, elle ne croît pas avec le temps : c'est la cohérence de phase.

Cette propriété est estimée par Farmer *et al* [30] à l'aide de la quantité statistique suivante :

$$\Delta T(i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |T_n(i) - \bar{T}(i)| \quad (3.53)$$

où $\bar{T}(i)$ est le temps moyen pour i cycles (un cycle est une révolution entre deux maxima), $T_n(i)$ est le temps pour i révolutions du $n^{\text{ème}}$ échantillon et N est le nombre d'échantillons.

Ils analysent donc les propriétés de cohérence à l'aide d'une statistique sur les temps de retour au maximum des variables $X(t)$ et $Z(t)$ du système de Lorenz (fig. 3.23). Ils observent des propriétés de cohérence différentes suivant la variable utilisée. La variable $Z(t)$ présente une cohérence de phase bien supérieure à celle qu'ils observent sur la variable $X(t)$. Si l'on reconnaît le principe d'équivalence des variables du point de vue de l'information sur la dynamique, ce résultat nous mène à une contradiction dans la mesure où la propriété de cohérence est une propriété du flot et non une propriété de certaines variables comme le laisse supposer les résultats de J. D. Farmer [30].

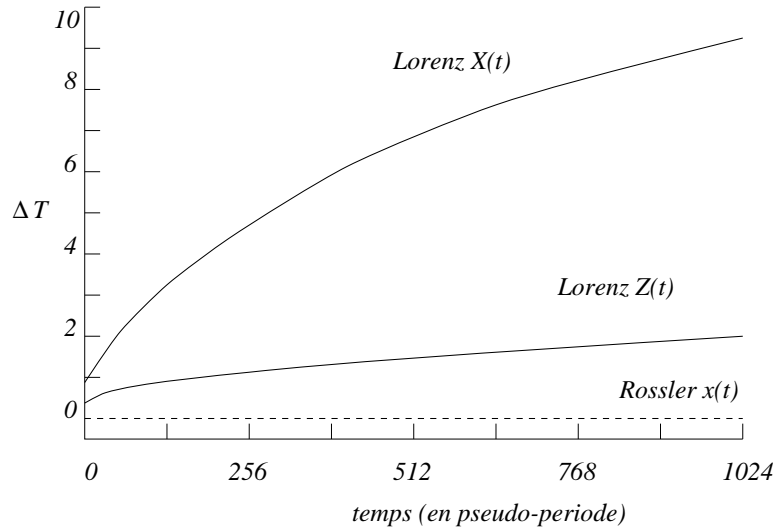


FIG. 3.23 – Perte de cohérence ΔT pour les variables $X(t)$ et $Z(t)$ de l'attracteur de Lorenz, et de la variable $x(t)$ du système de Rössler. Les temps sont adimensionnalisés par rapport à la pseudo-période fondamentale de l'attracteur considéré.

L'origine de ces résultats provient, en fait, de la différence de nature des variables du système de Lorenz. Les variables $X(t)$ et $Y(t)$ sont équivariantes, c'est à dire qu'elles distinguent les deux ailes : elles considèrent l'ensemble du portrait de phase. A l'inverse, la variable $Z(t)$ est invariante ; elle ne distingue pas les deux ailes ce qui revient à dire qu'elle réduit l'information dynamique sur le domaine fondamental que constitue une aile. Plus précisément, l'ensemble des maxima de la variable $X(t)$

$$\Sigma_{X_+} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial X} = 0, \frac{\partial^2 \phi_0(X, Y, Z)}{\partial X^2} < 0 \right\} \quad (3.54)$$

définit une section de Poincaré sur une seule aile (telle que $X > 0, Y > 0$). L'ensemble des maxima de la variable $Z(t)$ définit ce que nous appelons un ensemble de Poincaré $\Sigma_Z = \Sigma_{Z_+} \cup \Sigma_{Z_-}$ où

$$\Sigma_{Z_+} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X > 0, Y > 0, \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z} = 0, \frac{\partial^2 \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z^2} < 0 \right\} \quad (3.55)$$

et

$$\Sigma_{Z_-} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X < 0, Y < 0, \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z} = 0, \frac{\partial^2 \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Z^2} < 0 \right\} \quad (3.56)$$

Nous retrouvons ici des distinctions analogues à celles rencontrées au début de ce chapitre. Nous avons montré que la caractérisation topologique (dynamique) devait être réalisée sur le domaine fondamental. Aussi, lorsque c'est la variable $X(t)$ qui est considérée, l'étude doit être réduite au domaine fondamental. Dans la mesure où la cohérence de phase est une propriété dynamique (topologique), son étude doit être aussi réalisée sur le domaine fondamental. Ceci peut être simplement réalisé en utilisant l'ensemble de Poincaré défini par $\Sigma_X = \Sigma_{X_+} \cup P_{X_-}$ où Σ_{X_+} est donné par la relation (3.54) et Σ_{X_-} correspond à l'ensemble des minima de la variable $X(t)$:

$$\Sigma_{X_-} = \left\{ (X, Y, Z) \in R^3 \mid \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial X} = 0, \frac{\partial^2 \phi_0(X, Y, Z)}{\partial X^2} < 0 \right\} \quad (3.57)$$

Il apparaît donc que les statistiques réalisées par J. D. Farmer *et al* [30] portent sur des quantités fondamentalement différentes. L'une, issue de la variable $X(t)$, est liée à la période de révolution sur l'ensemble du portrait de phase alors que l'autre, issue de la variable $Z(t)$, est directement reliée à la période de révolution sur le domaine fondamental. Ainsi l'éventuelle cohérence de phase est complètement masquée au sein d'une variable équivalente. Dans un contexte plus général, les variables équivalentes ne sont pas de bonnes variables pour l'analyse du comportement dynamique d'un champ de vecteurs équivalent.

3.6.2 Les propriétés de mélange

De manière à observer la cohérence de phase, le comportement à long terme des trajectoires issues d'une section de Poincaré est étudié. En effet, la cohérence d'un système dynamique est fixée par les propriétés de mélange de l'attracteur sur lequel le comportement asymptotique s'installe.

Lorsqu'un attracteur est incohérent, un nuage de points répartis dans une section de Poincaré se développe sur l'ensemble de l'attracteur sous l'action du flot ϕ_t . La densité de points avoisine alors une distribution de probabilité asymptotique, qui est aussi appelée *mesure invariante* parce qu'elle est une signature du flot ϕ_t . La distribution finale est indépendante de la localisation de l'ensemble initial : aucune information sur le temps initial ou la position de l'ensemble ne persiste. Mais, si un attracteur possède un haut degré de cohérence de phase, il doit propager dans le futur de l'information sur la phase. L'ensemble de points doit rester localisé très longtemps.

L'attracteur de Lorenz possède un spectre d'exposants de Lyapunov constitué d'un exposant positif, d'un exposant nul et d'un exposant négatif. L'exposant positif implique que la taille d'un nuage de points localisé augmente (en moyenne) exponentiellement dans une direction transverse au flot ϕ_t . L'exposant nul implique que, en moyenne, le nuage n'évolue pas le long du flot ϕ_t . L'exposant négatif impose au nuage de se contracter suivant une direction transverse à l'attracteur.

Ceci est illustré sur la figure (3.24) où un ensemble de conditions initiales D est choisi tel que

$$D = \left\{ (X, Y, Z) \in R^3 \mid X = X_+, \frac{\partial f}{\partial X} > 0 \right\} \quad (3.58)$$

Il définit ainsi une section de Poincaré choisie sur l'aile droite. L'ensemble D est constitué de 500 points. L'évolution de cet ensemble est étudiée sous l'action du flot ϕ_t associé au champ de vecteurs \mathbf{f} du système de Lorenz. Une "photographie" est prise toutes les 81ms. Chaque vue (fig. 3.24, vue 1) est constituée de 9 photographies et correspond approximativement à une révolution sur le domaine fondamental (la pseudo-période fondamentale est de 0.73s).

Durant la première révolution (fig. 3.24, vue 1), le nuage de points évolue uniquement dans la direction transverse au flot. Aucune évolution le long du flot n'est observée. La structure en filament de l'ensemble original est préservée. La cohérence de phase est pour le moment conservée.

Lorsque la deuxième révolution est abordée (fig. 3.24, vue 2), le filament s'étire. Ceci est dû au gradient qui s'annule au voisinage du point fixe origine C_0 . Toute trajectoire passant en ce voisinage y reste un temps relativement long. De ce fait, l'extrémité périphérique du filament est étirée par le point fixe C_0 . La cohérence de phase, si elle est préservée au cœur des ailes, disparaît à la périphérie par un étirement du filament le long du flot.

Au fur et à mesure de la propagation du filament, cet effet s'amplifie, et le filament s'oriente le long du flot plutôt que transversalement. La cohérence de phase, qui se traduit par un filament transverse au flot, est

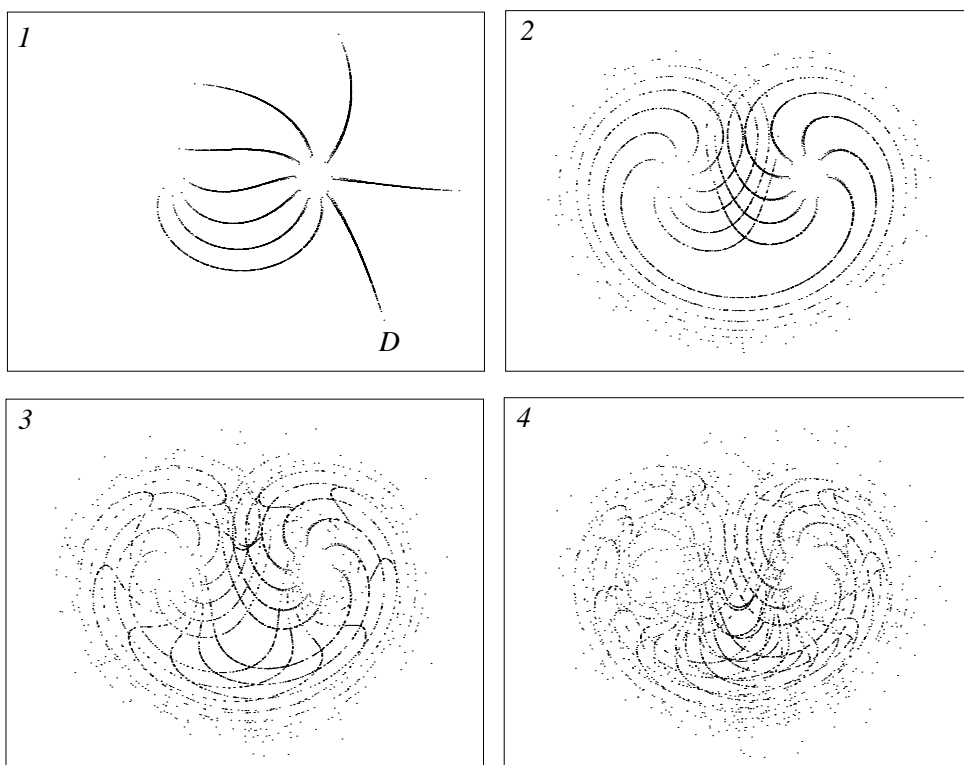


FIG. 3.24 – Propriétés de mélange du système de Lorenz : évolution d’un nuage de points issu d’une section de Poincaré D (sur chaque image sont représentées neuf photographies de l’évolution de D sur une pseudo-période T_0 : elles sont prises à un intervalle de temps de $T_0/9$).

alors détruite. Poursuivre l’étude du filament aboutirait à la photographie d’une répartition des points suivant la distribution représentative du flot.

Ce film sur les propriétés de mélange met en évidence que la cohérence de phase est une propriété du flot. Ainsi chaque variable, respectant le principe d’équivalence, doit contenir la même information sur la cohérence de phase.

3.6.3 Le problème

Les spectres de puissance étant une signature de la cohérence de phase, les considérations précédentes doivent se retrouver sur ceux-ci. En particulier, toutes les variables doivent fournir le même spectre de puissance. Un système comme celui de Rössler offre trois spectres identiques. Or, il est bien connu que le système de Lorenz a la fâcheuse particularité de ne pas offrir des spectres de puissance identiques selon qu’ils sont calculés à partir de telle ou telle variable. Il offre deux spectres identiques sur les variables X et Y qui diffèrent de celui issu de la variable Z (fig. 3.25).

Les spectres extraits des deux variables équivariantes ne présentent pas de pics au niveau de la fréquence associée à la pseudo-période de révolution sur le domaine fondamental. Les spectres sont monotoniquement décroissants. Aucune propriété de cohérence ne se retrouve sur ces variables : les résultats sont en accord avec l’étude de l’évolution de l’incertitude sur la mesure du temps de révolution (fig. 3.23). La variable $Z(t)$ présente un pic relativement large comparativement à celui observé sur le système de Rössler (variable $x(t)$ pour $a = 0.398$). En effet, la largeur des pics est liée à l’incertitude sur la période de révolution [30].

Suivant les constatations faites sur l’évolution de l’incertitude de mesure (section 3.6.1), le spectre de puis-

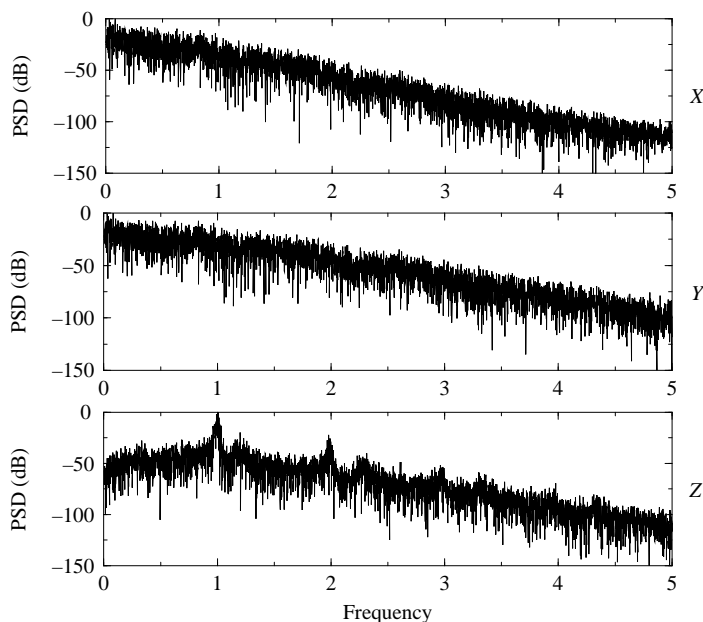


FIG. 3.25 – Spectres de puissance du système de Lorenz : les fréquences sont adimensionnalisées par rapport à la fréquence fondamentale. Les spectres sont calculés à partir de 32000 points à raison de 40 points par pseudo-période.

sance doit être effectué à partir d'une variable invariante (comme $Z(t)$). Les variables équivariantes $X(t)$ et $Y(t)$ peuvent être rendues invariantes par l'utilisation d'une valeur absolue. Cette astuce restaure une oscillation supplémentaire au sein de la série temporelle (fig. 3.26) lors d'une transition d'une aile à l'autre. La cohérence est de ce fait retrouvée. Le spectre calculé à partir de la variable "invariante" $|X(t)|$ présente maintenant le pic à la fréquence de la pseudo-période fondamentale (fig. 3.27).

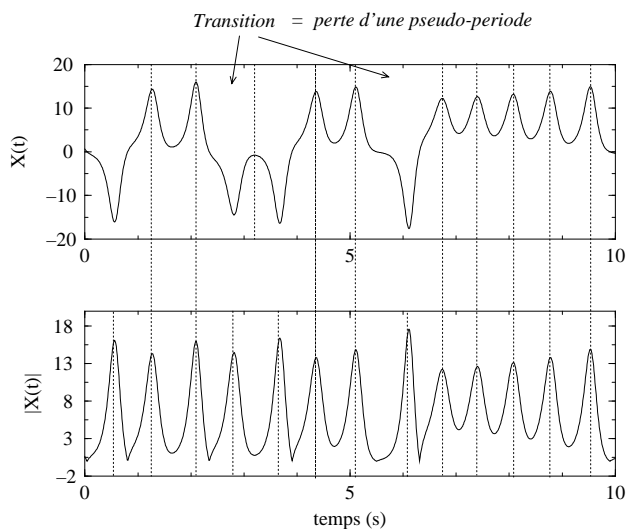
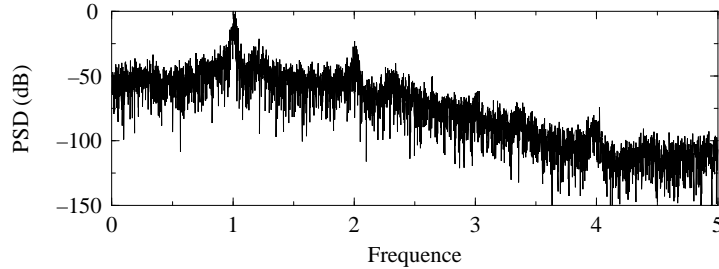


FIG. 3.26 – Apparition d'une oscillation supplémentaire sur la série $|X(t)|$ qui restitue la cohérence de phase.

Ainsi, le spectre de puissance peut être correctement estimé à partir d'une série équivalente du système de Lorenz à l'aide d'une simple valeur absolue.

FIG. 3.27 – Spectre de puissance extrait de la variable $|X(t)|$.

3.7 Conclusion

Nous avons maintenant établi la procédure de caractérisation d'un système équivariant. Si cette procédure est globalement similaire à celle déjà appliquée aux systèmes dépourvus de symétrie, elle n'en diffère pas moins dans certains détails. Nous dirons qu'un système possède une symétrie d'ordre n si la matrice équivariante γ est telle que $\gamma^n = I$. La symétrie appartient alors au groupe des permutations Z_n . L'espace des phases est alors constitué de n reproductions du domaine fondamental. La procédure est résumée en quatre étapes.

- 1. *Identification du domaine fondamental* : il n'existe pas de méthode générale pour identifier les propriétés de symétrie d'un système. Définir le domaine fondamental est actuellement une question de savoir faire. Toutefois E. Baramy, M. Dellnitz et M. Golubitsky [33] semblent ouvrir la voie d'une telle systématisation par une recherche de l'ordre de la symétrie.
- 2. *Construction d'une application de premier retour* : après avoir isolé le domaine fondamental, il est nécessaire de construire un ensemble de Poincaré qui se définit comme la réunion d'une section de Poincaré sur le domaine fondamental et de ses copies sur l'ensemble de l'espace des phases. Ainsi l'ensemble de Poincaré d'un système dynamique de symétrie Z_n est constitué de n sections de Poincaré. L'application de premier retour est alors construite sur une variable invariante, c'est à dire une variable qui ne distingue pas les différentes sections. Les orbites périodiques sont alors extraites.
- 3. *Partition du domaine fondamental* : une partition du domaine fondamental peut alors être envisagée. À l'aide de l'application de premier retour et d'une visualisation tridimensionnelle du portrait de phase, la structure de chaque bande est étudiée : leurs torsions locales et leurs rotations relatives sont recherchées. Un patron est alors proposé.
- 4. *Vérification du patron* : le patron est alors vérifié par calcul des nombres de liaisons de quelques orbites de faible période. Les orbites sont représentées n fois sur une projection régulière (les orbites asymétriques apparaissent par groupe de n orbites et les orbites symétriques décrivent n fois la séquence symbolique qui leur est associée sur le domaine fondamental). Le nombre de liaisons est alors de la forme :

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{2n} \left[\sum_p \sigma_{12}(p) \right] \quad (3.59)$$

Nous avons alors caractérisé la topologie d'un système par l'introduction d'un domaine fondamental. Cette utilisation de la symétrie a permis de réduire le nombre d'orbites périodiques distinctes. De manière générale, toute analyse d'un système dynamique devra être réalisée en tenant compte de sa symétrie. Ainsi le physicien veillera à utiliser une variable invariante pour le calcul des spectres de puissance.

De plus, nous avons vu qu'à chaque bande pouvait être associé un comportement dynamique différent. Suivant la signification des variables du système de Lorenz, nous savons qu'une trajectoire qui circule sur une seule aile correspond à des courants chauds ascendants qui subissent des modulations d'amplitude suivant la révolution sur l'aile. Lorsqu'une trajectoire effectue une transition d'une aile à l'autre, elle traverse obligatoirement une zone où les variables X et Y sont de signes opposés : les courants chauds sont alors descendants. Ainsi, au passage d'une trajectoire par la bande 1 du patron est associé un comportement dynamique différent : nous pouvons en effet concevoir que le processus physique responsable de l'ascension des courants froids est différent de celui des courants chauds. À chaque bande, il peut donc être associé un processus physique différent. Remarquons pour finir, qu'à la torsion locale impaire est associé un processus physique inverse de celui de la bande de torsion

locale paire. Ne doutons pas que les patrons deviennent des outils puissants de compréhension des processus physiques...

Bibliographie

- [1] **S. Smale**. Differentiable Dynamical Systems : I, Diffeomorphisms, *Bulletin of American Mathematical Society*, 73, pp. 747-817, 1967.
- [2] **G. B. Mindlin, R. Gilmore**. Topological analysis and synthesis of chaotic time series, *Physica D*, 58, pp. 229-242, 1992.
- [3] **P. Cvitanović, B. Eckhardt**. Symmetry Decomposition of Chaotic Dynamics, *Nonlinearity*, 6, pp. 277-311, 1993.
- [4] **O. E. Rössler**. An equation for Continuous Chaos *Physics Letters*, 57A (5), pp.397-398, 1976.
- [5] **J. W. Swift, K. Wiesenfeld**. Suppression of Period Doubling in Symmetric Systems. *Physical Review Letters*, 52 (9), pp. 705-708, 1984.
- [6] **Y. Aizawa**. Symbolic Approach to Intermittent Chaos, *Progress of Theoretical Physics*, 70 (5), pp. 1249-1263, 1983.
- [7] **D. W. Moore, E. A. Spiegel**. A thermally excited non-linear oscillator, *Astrophysical Journal*, 143 (3), pp. 871-887, 1966.
- [8] **E. N. Lorenz**. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp.130-141, 1963.
- [9] **M. Auvergne, A. Baglin**. A dynamical instability as a driving mechanism for stellar oscillations, *Astronomy-Astrophysics*, 142, pp. 388-392, 1985.
- [10] **M. Kolàr, G. Grumbs**. Theory for experimental observation of chaos in a rotating waterwheel, *Physical Review A*, 45 (2), pp. 626-637, 1992.
- [11] **D. Poland**. Cooperative catalysis and chemical chaos : a model for the Lorenz equations, *Physica D*, 65, pp. 86-99, 1993.
- [12] **H. Haken**. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Applied Physics Letters*, 40, pp. 291, 1975.
- [13] **B. Saltzman**. Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19, pp.329-341, 1962.
- [14] **A. Libchaber, J. Maurer**. *A Rayleigh-Bénard experiment : helium in a small box*. Nonlinear Phenomena at Phases Transitions, édité par T. Riste, pp. 259-286, 1982.
- [15] **J. Boussinesq**. *Théorie analytique de la chaleur*, 2, Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [16] **Rayleigh**. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*, 32, pp.529-546, 1916.
- [17] **E. N. Lorenz**. Maximun simplification of the dynamics Equations. *Tellus*, 13 (3), pp.243-254, 1960.
- [18] **J. Mardsen, H. McCracken**. *The Hopf Bifurcation and its applications*, Applied Mathematical Sciences 19, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [19] **B. Fielder**. *Global Bifurcations of Periodic Solutions with Symmetry*. Lecture Notes in Mathematics 1309, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [20] **J. Guckenheimer, P. Holmes.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [21] **J. S. Birman, R. F. Williams.** Knotted periodic orbits in dynamical systems : Lorenz's equations, *Topology*, 22 (1), pp. 47-82, 1983.
- [22] **R. F. Williams.** The Structure of Lorenz attractors. *IHES Publications Mathématiques*, 50, pp.73-100, 1979.
- [23] **C. Sparrow.** *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Applied Mathematical Sciences 41, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [24] **C. Letellier, P. Dutertre, G. Gouesbet.** Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, to be published in *Physical Review E*, 49 (4), April 1994.
- [25] **V. Franceschini, C. Giberti, Z. Zheng.** Characterization of the Lorenz Attractor by Unstable Periodic Orbits *Nonlinearity*, 6, pp. 251-258, 1993.
- [26] **C. Tresser, R. F. Williams.** Splitting words and Lorenz braids, *Physica D*, 62, pp. 15-21, 1993.
- [27] **G. B. Mindlin, X. J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, N. B. Tufillaro.** Classification of Strange Attractors by Integers, *Physical Review Letters*, 64 (20), pp. 2350-2353, 1990.
- [28] **Hao Bai Lin.** *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific Publishing, Singapore, 1989.
- [29] **P. Dutertre.** *Caractérisation des attracteurs étranges à l'aide de la population d'orbites périodiques*, Thèse de troisième cycle, LESP, Rouen, 1993.
- [30] **J. D. Farmer, J. P. Crutchfield, H. Fröeling, N. H. Packard, R. S. Shaw.** Power Spectra and Mixing properties of Strange Attractors. *Annals N. Y. Academy of Sciences*, 357, pp. 453-472, 1980.
- [31] **R. H. Abraham, C. D. Shaw.** *Dynamics, The Geometry of Behavior, Part III : Global Behavior*, Aerial Press, Santa Cruz, pp.64, 1982.
- [32] **P. Kent, J. Elgin.** Noose Bifurcation of Periodic Orbits, *Nonlinearity*, 4 (4), pp. 1045-1061, 1991.
- [33] **E. Baramy, M. Dellnitz, M. Golubitsky.** Detecting the symmetry of attractors, *Physica D*, 67, pp. 66-87, 1993.

Deuxième partie

Reconstruction des attracteurs
étranges

Chapitre 4

Principe des Reconstructions

4.1 Introduction

Un système dynamique défini par

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (4.1)$$

est décrit par le flot ϕ_t :

$$\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x}(0)) \quad (4.2)$$

Dans la plupart des systèmes expérimentaux, une seule observable est facilement accessible à la mesure. Ainsi le portrait de phase ne peut être directement obtenu. La reconstruction de l'espace des états est alors nécessairement le premier pas de toute analyse de la série temporelle mesurée. Cette analyse est menée à l'aide des outils de la théorie de la dynamique des systèmes. De manière générale, le champ de vecteurs \mathbf{f} n'est pas connu, mais nous pouvons être en mesure de reconstruire un espace des états équivalent (nous verrons dans quel sens) à l'original.

En 1980, la reconstruction de l'espace des états fut introduite dans la dynamique des systèmes indépendamment par N. H. Packard *et al* [1] et F. Takens [3]. En fait, dans l'analyse des séries temporelles, l'idée d'introduire un *décalage temporel* afin d'obtenir une approximation de la trajectoire est plutôt vieille et fut proposée en 1927 par G. Udny Yule [2]. La nouvelle contribution importante est la démonstration qu'il est possible de préserver des invariants géométriques tels que les valeurs propres d'un point fixe ou les exposants de Lyapunov d'une trajectoire. Ceci a été illustré numériquement par N. H. Packard [1] et prouvé par F. Takens [3]. L'année suivante, J. C. Roux et H. Swinney [4] présentent une reconstruction par la méthode des décalages du portrait de phases de la réaction de Belousov-Zhabotinski à partir d'une série temporelle expérimentale.

En 1985, J. P. Eckmann et D. Ruelle [5] développent cette idée et étudient non seulement les états reconstruits par décalages temporels mais aussi les relations entre les états reconstruits voisins. Dans le principe, on peut alors approximer non seulement l'attracteur mais aussi sa dynamique. Depuis il est devenu courant de regrouper les points voisins dans l'espace reconstruit et d'utiliser leurs images pour modéliser la dynamique dans de petites régions. Dans le même esprit, D. S. Broomhead et G. P. King [6] développent une technique locale de décomposition de l'espace des phases en composantes principales (*Singular Value Decomposition*).

En 1987, J. Cremers et A. Hübler [7] proposent la reconstruction d'un champ de vecteurs à partir de plusieurs variables afin de modéliser l'ensemble du portrait de phases. L'enjeu est maintenant une reconstruction globale de l'espace des phases. Depuis le début des années 90, les reconstructions d'un champ de vecteurs à partir d'une seule série scalaire temporelle se sont considérablement développées ([8], [9], [10] et [11]). G. Gouesbet a apporté une large contribution sur ce sujet ([12], [13], [14], [15] et [16]). Si les méthodes locales sont appliquées aux signaux expérimentaux, les méthodes globales n'en sont encore qu'aux investigations numériques. Les problèmes rencontrés seront développés dans les chapitres suivants.

L'une des grandes questions qui se posent sur les techniques de reconstruction porte sur l'équivalence entre le portrait de phases original et le portrait reconstruit. Quelles garanties pouvons-nous espérer sur l'information

disponible dans l'espace reconstruit ? Nous avons vu dans la première partie de cette thèse que seule l'information topologique nous importait. Nous tenterons de répondre au cours de ce chapitre à la question : les propriétés topologiques de l'attracteur original sont-elles préservées lors d'une reconstruction globale ? Auparavant nous aurons illustré le principe de la restitution de l'information sur les variables inobservées à la base de toutes les techniques de reconstruction. Le problème de la dimension de l'espace reconstruit sera abordé et le choix de celle-ci dans le cadre de ce travail sera justifié. Enfin nous étudierons le comportement de l'information sur la dynamique d'un système (ou de manière équivalente sur la topologie de l'attracteur) face aux *plongements différentiels* (reconstruction dans l'espace défini par les dérivées de la série temporelle étudiée).

4.2 Reconstruction de l'espace des phases

4.2.1 Le principe

Les données obtenues par les physiciens étudiant des systèmes hydrodynamiques prennent souvent la forme de séries temporelles, c'est à dire d'une série de valeurs mesurées à intervalles de temps réguliers. Or l'étude d'un système dynamique nécessite de connaître ses états successifs dans l'espace des états de dimension 2, 3 ou plus. Il va donc être important de pouvoir accéder à cette information à partir de la seule série de mesures : ceci sera réalisé à l'aide d'une méthode de reconstruction.

Ainsi, de manière à spécifier l'état d'un système d -dimensionnel à un instant donné, la connaissance de d quantités indépendantes (au sens spatial) est requise. Prenons un exemple simple. Un cercle peut représenter l'évolution dans l'espace des phases (défini par θ et $\dot{\theta}$) d'un pendule simple au voisinage du point d'équilibre. Le cercle est un objet qui peut être décrit dans un plan euclidien par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2\pi\omega t) \\ y(t) = \sin(2\pi\omega t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

où t est le temps et ω une vitesse angulaire.

Ce système est constitué d'équations couplées, c'est à dire qu'il existe une relation entre la variable x et la variable y . En effet la trigonométrie nous rappelle que $\sin(2\pi\omega t) = \cos(2\pi(\omega t - \tau))$ où $\tau = 1/4$ représente un décalage temporel. Cela revient à dire que le cercle peut être tracé avec la seule variable $x(t)$ en utilisant le décalage temporel τ : chaque point du cercle est donc défini par les coordonnées $(x(t) = \cos(2\pi\omega t), x(t - \tau))$. Ainsi, si nous mesurons uniquement la série temporelle $x(t)$, nous sommes capable de dessiner le cercle en introduisant une deuxième variable (dite indépendante) par un décalage temporel τ (fig. 4.1). Nous avons ainsi reconstruit l'espace originel (x, y) en utilisant l'espace défini par le système de coordonnées $(x(t), x(t - \tau))$. De manière analogue, la reconstruction du cercle peut être obtenue par l'utilisation des dérivées (la dérivée d'un sinus est un cosinus et vice-versa).

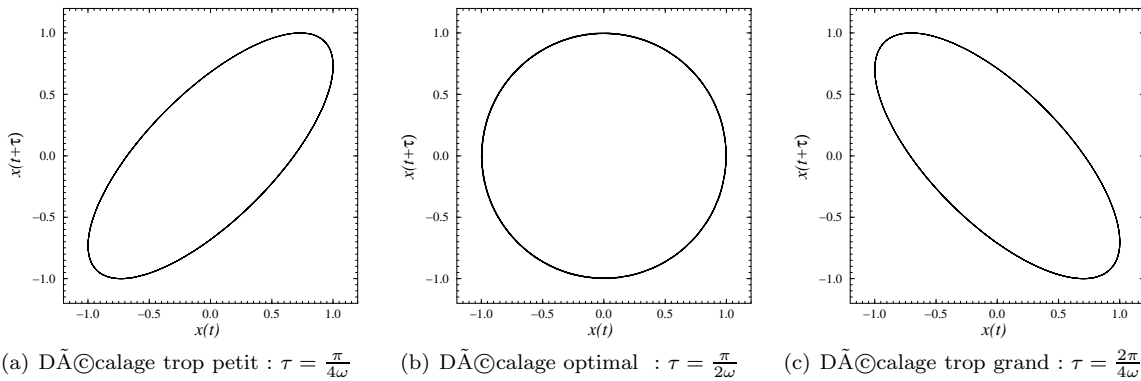


FIG. 4.1 – Reconstruction du cercle par la méthode des décalages : influence du décalage τ sur la qualité de la reconstruction : a) décalage trop faible, b) décalage correct et c) décalage trop grand.

La base de la technique de reconstruction introduite par N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer et R. S. Shaw [1] repose sur ce simple principe. Ils ont appliqué cette technique au système tridimensionnel établi par Rössler. Ils la présentent de la manière suivante :

Nous supposons que tous les jeux de trois quantités indépendantes qui définissent facilement et de manière unique les états de l'attracteur sont difféomorphiquement équivalents. Les trois quantités habituellement utilisées sont les valeurs de chaque coordonnée de l'espace des phases $(x(t), y(t), z(t))$.

Nous avons trouvé qu'avec une seule série scalaire temporelle issue de l'intégration du système de Rössler, on pouvait obtenir un jeu de trois quantités indépendantes qui semble produire une représentation fidèle de la dynamique dans l'espace des phases original x, y, z . Un des jeux possibles de trois quantités est la valeur d'une coordonnée couplée à ses valeurs à deux instants précédents, soit $x(t), x(t - \tau)$ et $x(t - 2\tau)$.

Cette technique repose sur la redondance de l'information au sein d'un système physique. Ce concept fut introduit par J. D. Farmer [18] :

Quelle que soit la variable à laquelle vous pensez, son évolution est obligatoirement influencée par toutes les variables qui interagissent avec elles. Leurs valeurs doivent d'une manière ou d'une autre se retrouver dans l'histoire de votre variable. Elle est inévitablement marquée par les autres.

Les techniques de reconstruction nécessitent donc un couplage des variables au sein du champ de vecteurs \mathbf{f} , sinon aucune information ne peut être transmise d'une variable à l'autre. Dans le contexte des systèmes chaotiques, un tel couplage existe toujours.

En pratique, ces techniques de reconstruction reposent sur le choix d'un décalage temporel τ . La détermination de τ a donné lieu à une littérature prolifique qui ne propose que des solutions où le libre arbitre du "chaoticien" joue un grand rôle. Si dans le cas du cercle nous pouvons déduire analytiquement la valeur $\tau = 1/4$, ceci n'est pas possible dans le cas des attracteurs. Le choix est guidé par un comportement caractéristique des trop faibles valeurs de τ qui ont tendance à produire une reconstruction qui se confine autour de la première bissectrice (fig. 4.1.a) et celui de trop grandes valeurs qui orientent de manière exagérée le portrait reconstruit perpendiculairement à la première bissectrice (fig. 4.1.c). Le décalage temporel τ est un paramètre de reconstruction. Sa détermination est essentielle dans la qualité de la reconstruction. Un second paramètre est représenté par la dimension m de l'espace reconstruit.

4.2.2 Le choix de la dimension

L'idée de base des méthodes de reconstruction est que le passé et le futur d'une série temporelle contiennent de l'information sur les variables d'états inobservées, information qui peut être utilisée pour définir un état au temps présent. L'information sur le passé et le futur peut être contenue dans un vecteur de la forme

$$\mathbf{s}(t) = (x(t + m_f\tau), \dots, x(t), \dots, x(t - m_p\tau)) \quad (4.4)$$

où τ est le décalage temporel, m_p le nombre de coordonnées du passé, m_f le nombre de coordonnées du futur. La dimension m de l'espace reconstruit est alors égale à $m_p + m_f + 1$. Rappelons que les états sont définis par un vecteur $\mathbf{x}(t)$ de dimension d et de la forme

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), \dots) \quad (4.5)$$

F. Takens étudie la méthode de reconstruction par décalage temporel τ qui transforme le vecteur de l'espace des états d'un système de dimension d en un vecteur de dimension m par l'application Φ :

$$\Phi(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{s}(t) \quad (4.6)$$

Il montre que génériquement Φ est un *plongement* lorsque $m \geq 2d + 1$. Un plongement est une transformation différentiable injective des coordonnées dont la transformation différentiable inverse existe. Dans ce cas, aucune

information n'est perdue sous la reconstruction. Si Φ est un plongement alors il existe une dynamique équivalente \mathbf{F} induite sur l'espace des vecteurs reconstruits. Les états reconstruits peuvent être utilisés pour estimer le champ de vecteurs \mathbf{F} , et puisque \mathbf{F} est équivalent à la dynamique originale \mathbf{f} , nous pouvons l'utiliser pour caractériser le système. L'application Φ transforme l'espace des états M de dimension d en un espace reconstruit de dimension m . Si la surface $\Phi(M)$ ne contient pas de self-intersections, alors tout $\mathbf{s} \in \Phi(M)$ est l'unique image d'un état $\mathbf{x} \in M$. Si Φ est différentiable, alors Φ est un *plongement*. Ceci est illustré pour $d = 2$ et $m = 3$ sur la figure 4.2 (d'après [10]); dans ce cas des self-intersections sont présentes le long d'une courbe unidimensionnelle.

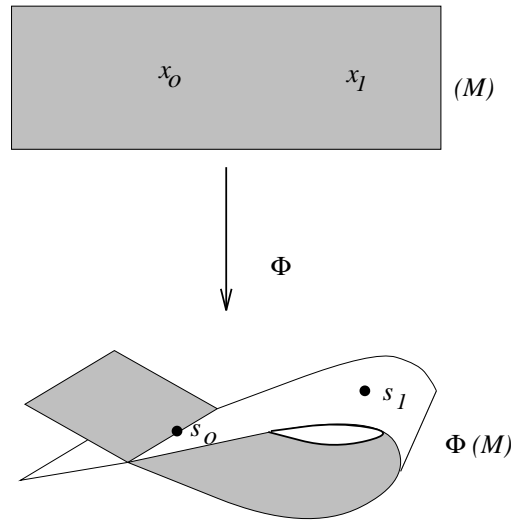


FIG. 4.2 – Solution de l'équation $\mathbf{s} = \Phi(\mathbf{x})$ lorsque $d = 2$ et $m=3$.

M est l'espace des états bidimensionnel et $\Phi(M)$ est la surface reconstruite : dans ce cas, il y a self-intersection. L'état \mathbf{x}_0 est transformé sur une self-intersection alors que \mathbf{x}_1 ne l'est pas. Excepté pour les valeurs spéciales de \mathbf{x} comme \mathbf{x}_0 , Φ définit un plongement [24]. Lorsque $m = d + 1$, l'ensemble des self-intersections est génériquement au moins de dimension $d - 1$, et Φ est presque partout un plongement [24]. Lorsque m croît de 1, la dimension de l'ensemble des self-intersections décroît de 1, jusqu'au cas où finalement $m > 2d$ alors il n'y a plus du tout de self-intersections. Ainsi $m \geq 2d + 1$ garantit que Φ est un plongement. Il est cependant possible que Φ soit un plongement lorsque m est aussi petit que $m = d$.

Par exemple, nous verrons (section 4.4.1) qu'à partir de la variable y du système de Rössler [17] nous pouvons définir un difféomorphisme entre l'attracteur original et l'attracteur reconstruit dans l'espace des dérivées : il y a alors plongement. Mais auparavant nous étudierons plus en détail les sources de self-intersections.

4.3 Equivalence des variables ?

D'après le théorème de Takens, toute variable du système peut être indifféremment utilisée pour reconstruire un portrait des états. Comme nous le verrons, l'hypothèse de l'équivalence des variables du point de vue des reconstructions est bien malmenée. En effet, certaines variables sont plus "sympathiques" que d'autres. Un réel problème survient lorsque les variables sont issues d'un système pourvu de propriétés de symétrie : la plupart du temps, le portrait reconstruit possède des propriétés de symétrie différentes de l'original. Ces différences concernant l'information contenue dans une observable sont dues à la configuration de l'attracteur dans l'espace des phases.

4.3.1 Le rôle de la courbure

Les attracteurs tridimensionnels étudiés dans la première partie sont suffisamment dissipatifs pour que leur étude puisse être ramenée à l'étude d'une surface. En effet, un calcul de leur dimension fractale révèle une dimension très voisine de 2 (1.93 pour le système de Rössler pour des paramètres de contrôle égaux à $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$ et 2.063 pour le système de Lorenz pour $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ [22]). Cette surface définit un espace supposé bidimensionnel : elle est générée par la population d'orbites périodiques instables de l'attracteur.

Nous nous intéresserons au cours de ce chapitre à la notion de courbure d'objets plongés dans un espace euclidien. Par exemple, le cercle, espace géométrique à une dimension, est d'autant plus courbé que son rayon est plus petit. A l'inverse, si son rayon tend vers l'infini le cercle se rectifie en perdant sa courbure et tend vers une droite. Par définition la courbure $\mathbf{k}(s)$ en un point s d'une courbe différentiable est définie comme étant l'inverse du rayon de courbure. Ainsi, une droite est de rayon de courbure infini et donc de courbure nulle. De même, la sphère tend vers le plan en augmentant indéfiniment son rayon (à notre échelle la surface de la Terre est plate si nous faisons abstraction du relief).

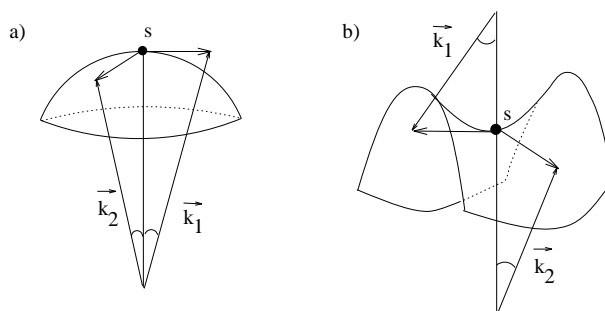


FIG. 4.3 – a) courbure positive, b) courbure négative

La courbure a donc une définition géométrique bien précise mais quand on augmente le nombre de dimensions, la définition se complique : la courbure ne se réduit plus à un seul nombre comme dans l'exemple du cercle et il faut alors parler "des courbures". Examinons le cas simple du cylindre, surface à deux dimensions. La courbure mesurée parallèlement à son axe de symétrie est tout simplement nulle, alors que la courbure mesurée dans la direction perpendiculaire est celle du cercle inscrit dans le cylindre.

Malgré les multiples facettes de la courbure, il est possible de parler d'une courbure intrinsèque. En chaque point d'une surface à deux dimensions, on peut mesurer dans deux directions perpendiculaires deux rayons de courbure, dont le produit inversé définit la courbure intrinsèque de la surface. Si les deux rayons de courbure se trouvent du même côté de la surface, la courbure est positive tandis que si les rayons de courbure sont de côtés opposés, la courbure est négative (fig. 4.3).

Le fait de visualiser la sphère, le cylindre et toute surface bidimensionnelle comme étant plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions incite à dire qu'une surface est courbée dans quelque chose. Pourtant, sur le strict plan de la topologie, on peut mesurer toutes les propriétés des surfaces à deux dimensions en ignorant parfaitement l'existence de l'espace de plongement. Par exemple, au signe de la courbure peut être associée une propriété de ces surfaces. Le cylindre a une courbure intrinsèque nulle ; on peut en effet le découper et le poser à plat sur une table sans le déchirer (fig. 4.4.a).

La sphère possède une courbure strictement positive ; si l'on découpe une calotte selon un cercle et si l'on essaie de l'aplatir, la surface découpée se déchire car son aire est inférieure à celle du cercle de même rayon découpé dans un plan euclidien \mathbf{R}^2 (fig. 4.4.b).

Il existe aussi des surfaces de courbure négative. Toujours à deux dimensions, l'exemple classique est le parabolöide hyperbolique, dont une portion se visualise sous la forme d'une selle de cheval (fig. 4.3.b). L'environnement d'une telle surface peut être très complexe (fig. 4.5). Si l'on découpe une portion de cette surface selon un arc de cercle et si l'on tente de l'aplatir, la portion se plisse car son aire est supérieure à celle du cercle de même rayon découpé dans un plan (fig. 4.5) [23]. Nous avons là l'origine de l'apparition des self-intersections

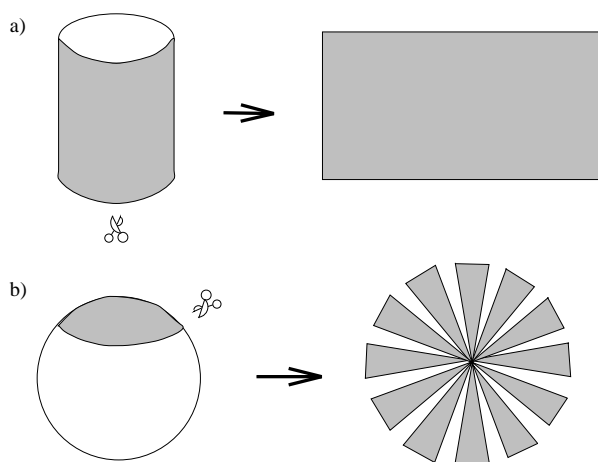


FIG. 4.4 – Exemple de plongement de surfaces dans un espace euclidien \mathbf{R}^2 : a) le cylindre, b) la sphère

lors d'une reconstruction.

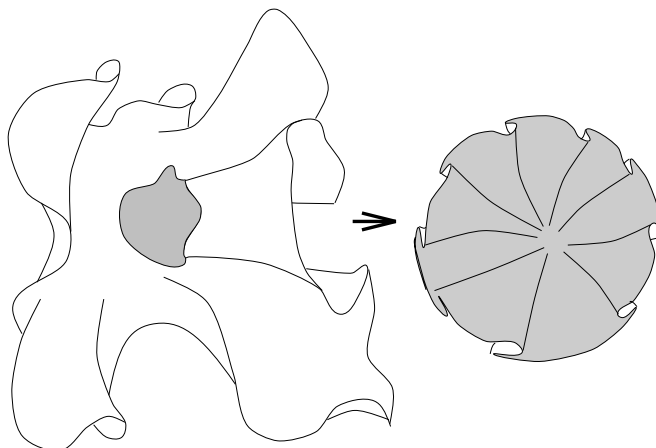


FIG. 4.5 – Effet de la courbure négative d'une surface à la géométrie hyperbolique lors de la projection sur un plan euclidien \mathbf{R}^2 .

Si l'on se déplace en "ligne droite" tout en épousant les courbes d'une surface à courbure négative, on ne revient pas, en général, à son point de départ mais on s'en éloigne indéfiniment. Cette propriété permet l'obtention de la sensibilité aux conditions initiales des attracteurs étranges qui sont la plupart du temps construits autour d'un point fixe instable de type "selle". Ainsi ces surfaces jouent un rôle prépondérant dans la dynamique des systèmes non-linéaires. En effet, ce sont elles qui assurent la possibilité d'obtenir une trajectoire aperiodique et par là-même, un comportement chaotique. Au voisinage d'un point selle, deux trajectoires initialement proches l'une de l'autre peuvent diverger exponentiellement avec le temps (figure 4.6). Les objets à courbure négative sont hyperboliques et possèdent au moins une direction stable et une direction instable.

4.3.2 Différentes qualités de reconstruction

Le caractère hyperbolique de tels objets a de profondes conséquences sur leur plongement dans un espace euclidien. Prenons par exemple le flot ϕ_t sur l'espace euclidien R^d généré par un système autonome de d

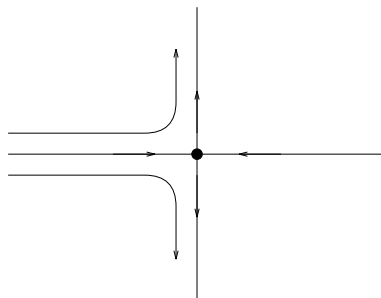
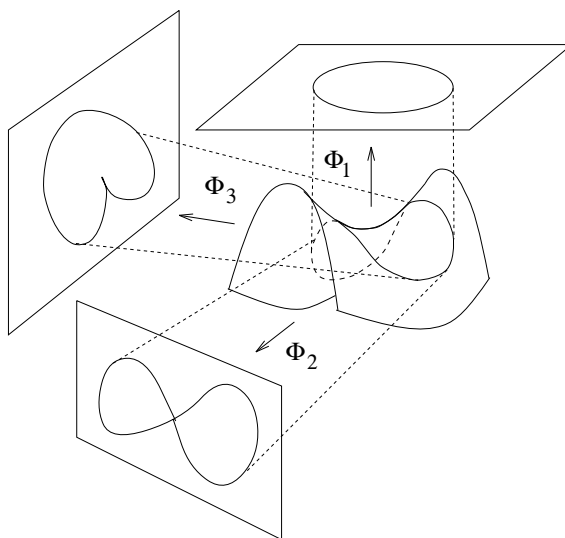


FIG. 4.6 – Divergence de deux trajectoires initialement proches au voisinage d'un point selle.

équations différentielles. Supposons que toutes les trajectoires soient asymptotiques à un ensemble attracteur \mathcal{A} . L'étude du comportement à long terme du système implique alors l'étude de l'ensemble \mathcal{A} . Soit une orbite périodique ζ de cet ensemble \mathcal{A} inscrite sur une surface bidimensionnelle de courbure négative au voisinage d'un point selle (fig. 4.7). Sa dimension fractale est donc de 1. Projets cette orbite périodique ζ sur un plan bidimensionnel euclidien ; suivant la direction choisie de la projection, nous obtenons une configuration sans intersection ou pourvue d'une intersection (fig. 4.7). Sur la transformation Φ_1 (fig. 4.7), la position relative des points est préservée. Si des points sont distincts sur le lacet ζ alors les deux points images qui leur sont associés sont distincts sur l'image $\Phi_1(\zeta)$. La projection est injective. Dans le cas de la transformation Φ_2 , il existe deux points distincts de l'orbite périodique ζ qui ont pour image un même point de $\Phi_2(\zeta)$. Du point de vue de la reconstruction de l'espace des états cela signifie que deux états distincts du système ne peuvent être distingués : de l'information a été perdue.

FIG. 4.7 – Lacet ζ inscrit sur une variété au voisinage d'un point selle : Φ_1 définit un plongement de ζ sur un plan euclidien, Φ_2 une immersion non injective et Φ_3 une application injective qui n'est pas une immersion.

La propriété d'injectivité est utile car elle préserve l'objet reconstruit d'une violation du principe du déterminisme. La projection Φ_2 peut associer deux futurs différents à un même état alors que le déterminisme est garanti sous Φ_1 . La définition précise d'un plongement implique la structure différentielle de l'espace des états. Une application injective est une application qui ne confond pas des points, c'est à dire qu'elle n'associe pas une même image à deux points distincts. Un plongement est une application qui ne confond pas des points ou des directions tangentes. Ainsi, pour définir un plongement, il est nécessaire de considérer aussi bien l'ensemble des points que la structure des espaces tangents.

Soit M une variété continuellement différentiable. Une application continuellement différentiable Φ sur M est une *immersion* si l'application dérivée $D\Phi(\mathbf{x})$ représentée par la matrice jacobienne de Φ au point \mathbf{x} est injective en tout point de M . Puisque $D\Phi(\mathbf{x})$ est une application linéaire, ceci est équivalent à ce que $D\Phi(\mathbf{x})$ ait un jacobien non nul. Ceci peut être réalisé que Φ soit injective ou non. Sous une *immersion*, aucune structure différentielle de M n'est perdue sur $\Phi(M)$ [24].

Définition 3 Soit Φ une application continuellement différentiable entre deux variétés compactes M_1 et M_2 . L'application Φ est une immersion si à chaque point $P \in M_1$, la différentielle $d\Phi_P : f_P(M_1) \rightarrow f_{\Phi(P)}(M_2)$ est un monomorphisme, c'est à dire une application injective. Si de plus l'application Φ transforme injectivement M_1 en $\Phi(M_1)$ et que cette image est un ensemble fermé, l'application Φ est un plongement. L'image $\Phi(M_1)$ est dans ce cas une sous-variété dans M_2 [25].

Ainsi l'application Φ_1 (fig. 4.7) définit un plongement : les propriétés tangentielles sont préservées et à chaque point de l'image du lacet $\Phi(\zeta)$ est associée un unique point du lacet ζ . L'application Φ_2 préserve elle aussi la structure tangentielle mais il existe au moins un point de l'image du lacet $\Phi_2(\zeta)$ qui possède deux antécédents sur le lacet ζ : Φ_2 définit une immersion. Réaliser une immersion ne garantit donc pas la conservation du déterminisme. L'application Φ_3 associe à chaque point du lacet ζ un point différent de l'image du lacet $\Phi_3(\zeta)$. Toutefois, elle ne préserve pas les propriétés tangentielles du lacet ζ et un point de rebroussement apparaît sur $\Phi_3(\zeta)$. Φ_3 n'est donc pas une immersion.

Il est donc important de s'assurer des propriétés offertes par l'application Φ qui projette l'objet dans un espace reconstruit.

4.3.3 Théorème de Whitney

Un plongement de M est un difféomorphisme de M sur ses images $\Phi(M)$, ce qui représente une application injective continuellement différentiable qui possède une application inverse continuellement différentiable. Pour une variété compacte M , l'application Φ est un plongement si, et seulement si, Φ est une immersion injective. La transformation Φ_1 (fig. 4.7) est un exemple de plongement d'une orbite périodique ζ sur un plan. Son information différentielle est préservée et aucune self-intersection n'apparaît. La transformation Φ_2 représente une immersion qui n'est pas injective (des intersections apparaissent) et la transformation Φ_3 est une application injective qui n'est pas une immersion (un point de rebroussement survient, signature de propriétés différentielles perdues). Nous verrons que la structure d'une simple orbite de période 1 contient une information très riche sur l'ensemble du portrait de phases, aussi il est important de la reconstruire correctement. L'équivalence difféomorphique n'est donc pas assurée lors de la projection d'une orbite périodique unidimensionnelle ζ dans un plan euclidien bidimensionnel. En fait seul un espace tridimensionnel assure l'obtention d'une image $\Phi(\zeta)$ difféomorphiquement équivalente à l'orbite périodique unidimensionnelle. Plus généralement, soit $d = 1$ la dimension de l'objet original, la dimension de l'espace de plongement doit être supérieure ou égale à $2d + 1$ pour garantir une projection difféomorphiquement équivalente : c'est le théorème de H. Whitney [26]!

Avec des arguments géométriques simples nous avons vu que le plongement d'un objet de dimension d dans un espace euclidien \mathbb{R}^m était difféomorphiquement équivalent à l'original lorsque $m \geq 2d + 1$. Si l'équivalence difféomorphique est garantie sous cette condition, elle n'est pas interdite dans des dimensions inférieures (fig. 4.7, Φ_1 est un difféomorphisme). Elle est permise lorsque la projection est réalisée suivant une direction où aucun plissement (du type de ceux rencontrés lors de la projection d'une surface de courbure négative sur un plan euclidien \mathbb{R}^2 , figure 4.5) n'apparaît : en effet, lors d'une projection il existe une direction suivant laquelle aucune portion de la surface n'est cachée par une autre. Dans le cas d'une surface au voisinage d'un point selle, cette direction \vec{n}_1 est perpendiculaire à l'espace tangent au point selle (fig. 4.8.a). Par contre dans la direction \vec{n}_2 (fig. 4.8.b), la projection de la surface au voisinage du point selle présente un plissement (une superposition de portions de surfaces, c'est à dire que deux points distincts de l'espace original ont une même image dans l'espace de projection). Dès que ceci survient, l'équivalence difféomorphique est perdue. Nous avons là les origines profondes de la non-équivalence entre les différentes variables d'un système dynamique non-linéaire.

Nous allons illustrer ceci sur les systèmes de Rössler, de Lorenz et de Burke et Shaw.

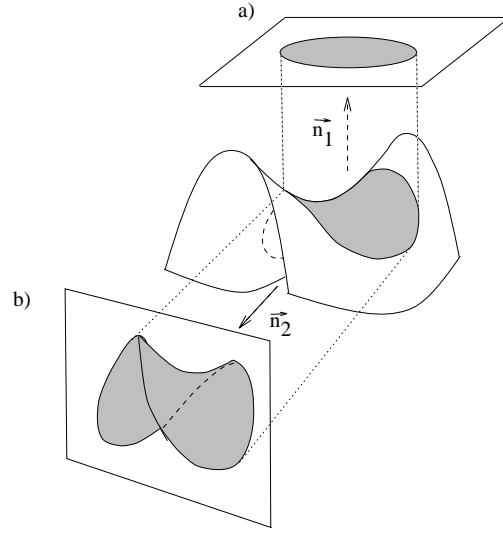


FIG. 4.8 – Deux directions de projection de la surface au voisinage d'un point selle : a) projection sans plissement et b) projection avec plissements (des parties se recouvrent)

4.4 Applications

Soit un système dynamique continu défini par un ensemble d'équations différentielles ordinaires

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (4.7)$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur temporel et \mathbf{f} un champ de vecteurs composé de d fonctions continuellement différentiables générant un flot ϕ_t . $\mu \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur de l'espace des paramètres de contrôle du système. Le système (4.7) est appelé système original. Dans la présente étude, nous n'étudierons que des flots tridimensionnels. Dans ce cas, le système original peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) \end{cases} \quad (4.8)$$

Nous connaissons l'histoire d'une seule de ces variables (numériquement ou expérimentalement) sous la forme d'une série scalaire temporelle. Supposons que nous connaissons l'évolution de la variable $x(t)$. Notre objectif est de réaliser un "plongement différentiel" de la dynamique défini sous la forme d'un système standard [13] (ou canonique [27]) extrait à partir d'une des variables du système original. Ce système standard s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = F_s(X, Y, Z) \end{cases} \quad (4.9)$$

Afin d'établir dans quelle mesure le système reconstruit est équivalent au système original, nous pouvons définir une transformation qui nous permettra de passer de l'ensemble attracteur \mathcal{A}_O du système original défini par les variables $(x(t), y(t), z(t))$ à l'ensemble attracteur \mathcal{A}_S du système standard défini par les variables $(X(t), Y(t), Z(t))$. La *transformation directe standard* Φ_s exprimant les coordonnées standard $(X(t), Y(t), Z(t))$ en fonction des coordonnées originales $(x(t), y(t), z(t))$ est alors introduite et s'exprime sous la forme suivante :

$$\Phi_s \equiv \begin{cases} X = x \\ Y = f_1(x, y, z) \\ Z = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_3 \end{cases} \quad (4.10)$$

Nous avons choisi la dimension du système reconstruit égale à 3 de manière à utiliser les techniques de caractérisation topologique présentées dans la première partie de cet ouvrage. Le critère de Takens [3] n'est alors pas respecté puisque la dimension de l'espace reconstruit est égale à celle du système original. Dans ce cas l'application transformant le système original en système reconstruit devra être difféomorphe sinon de l'information sera perdue.

Pour nous assurer de cela, nous avons recours au théorème *d'inversion locale* [28].

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, U un ouvert de E et V un ouvert de F . On dit que f est un difféomorphisme local de classe C^r au voisinage de a de U , s'il existe des ouverts U' de E et V' de F , avec $a \in U' \subset U$, $f(a) \in V' \subset V$ tels que f induise un difféomorphisme de U' sur V' .

Supposons que f soit un difféomorphisme local en a , gardons les notations précédentes et notons $g : V' \rightarrow U'$ l'application réciproque de $f : U' \rightarrow V'$. Dérivant la relation $g(f(x)) = x$, on obtient $g'(f(x)) \circ f'(x) = I$; dérivant la relation $f(g(y)) = y$, on obtient de même $f'(g(y)) \circ g'(y) = I$. Ainsi si $x \in U'$ et $g \in V'$ se correspondent (on a donc $y = f(x)$ et $x = g(y)$), les applications linéaires $f'(x) : E \rightarrow F$ et $g'(y) : F \rightarrow E$ sont réciproques l'une de l'autre. En particulier au voisinage de a , $f'(a)$ est bijective. On peut donc énoncer le théorème suivant (dit d'inversion locale) :

Théorème 4 : Soit $r \in [1, +\infty]$ et soit f une application de classe C^r de U dans F . Pour que f soit un difféomorphisme local de classe C^r en a , il faut et il suffit que l'application linéaire tangente $f'(a)$ soit bijective (c'est à dire qu'elle soit un isomorphisme).

Dans le cas où l'on a choisi des bases dans E et F (nécessairement de même dimension), ce qui revient à prendre $E = F = R^n$, explicitons ce théorème. On considère donc un ouvert U de R^n , un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de U et n fonctions $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ de classe C^r sur U , avec $r \in [1, \infty]$. La dérivée de f en a est l'application linéaire de R^n dans R^n de matrice

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) (a_1, \dots, a_n)$$

(c'est à dire la matrice jacobienne de f_1, \dots, f_n en a). Si le déterminant jacobien

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1,\dots,n} \right)$$

est non nul en a , alors dans un ouvert U' de U contenant a convenable, les équations

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1; \dots; f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n$$

ont une solution unique pour (y_1, \dots, y_n) voisin de

$$b = (b_1, \dots, b_n) = (f_1(a_1, \dots, a_n); \dots; f_n(a_1, \dots, a_n))$$

De plus cette solution s'écrit

$$x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n); \dots; x_n = g_n(y_1, \dots, y_n)$$

où les fonctions g_1, \dots, g_n sont de classe C^r au voisinage de b . Enfin les matrices jacobienes $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$ et $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)$ sont, aux points correspondants, inverses l'une de l'autre.

Laissons maintenant le langage mathématique et transposons le théorème d'inversion locale à notre cas :

Théorème 5 : La transformation standard Φ_s définit un difféomorphisme de l'espace des états dans l'espace reconstruit (soit ici de R^3 dans R^3) si son déterminant jacobien $D\Phi_s$ ne s'annule en aucun point de l'espace des états.

Ainsi vérifier que Φ_s est un difféomorphisme se réduit simplement à l'étude de son jacobien.

Précisons que la transformation standard Φ_s est définie sans aucune singularité puisque le champ de vecteur original (f_1, f_2, f_3) est continuellement dérivable. La transformation standard va donc nous permettre de connaître, au moins en partie, la nature de l'équivalence entre les deux attracteurs \mathcal{A}_S et \mathcal{A}_O .

4.4.1 Le système de Rössler

Le système de Rössler est un système tridimensionnel dépourvu de toute symétrie proposé par O. E. Rössler [17]. Il est défini par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (4.11)$$

La reconstruction de ce système sera envisagée dans un premier temps pour des paramètres de contrôle $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$ pour lesquels le comportement asymptotique s'installe sur un attracteur étrange. Celui-ci est représenté figure 4.9.a accompagné de son application de premier retour du plan de Poincaré P_x à lui-même défini par

$$P_x = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_-, \frac{\partial \phi_0}{\partial x} > 0 \right\} \quad (4.12)$$

où $x_- = \frac{c - (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2}$ est la coordonnée en x du point fixe central (voir Chapitre 2).

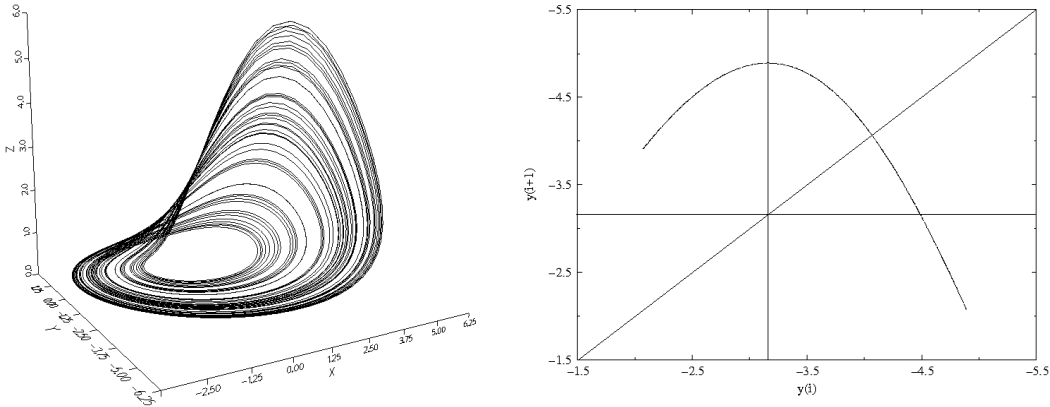


FIG. 4.9 – a) Attracteur du système de Rössler pour des paramètres de contrôle $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$ et b) son application de premier retour dans la section P_x

Chacune des variables du système de Rössler peut être choisie comme observable ; trois cas peuvent donc être envisagés.

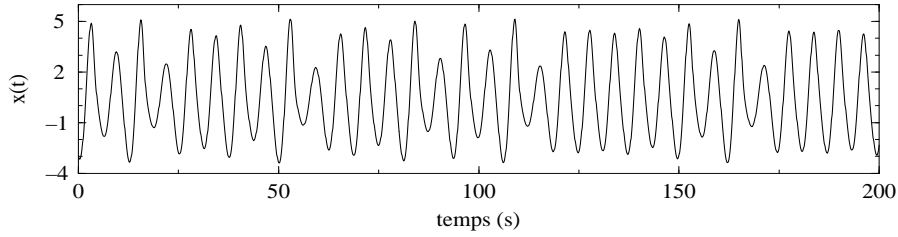
Observable $x(t)$

La variable $x(t)$ est la seule observable supposée connue. Nous connaissons donc l'histoire d'une série scalaire temporelle dont l'évolution est illustrée figure 4.10. Dans ce cas, la transformation standard Φ_x reliant l'attracteur original \mathcal{A}_O et l'attracteur \mathcal{A}_{S_x} associé au système standard est de la forme :

$$\Phi_x = \begin{cases} X = x \\ Y = -y - z \\ Z = -b - x - ay + z(c - x) \end{cases} \quad (4.13)$$

La matrice jacobienne de cette transformation est définie par :

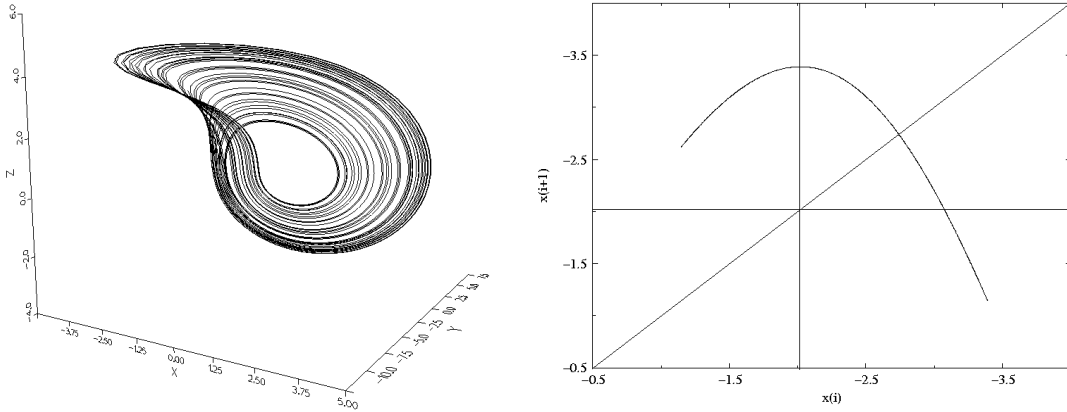
$$D\Phi_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -z & -a & c - x \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

FIG. 4.10 – Evolution temporelle de la variable $x(t)$ du système de Rössler

Le jacobien s'annule sur le plan d'équation $x_J = a + c$ soit $x_J = 4.398$. Ce plan est de mesure de Lebesgue nulle (probabilité de visite nulle), aussi Φ_x est presque partout un plongement. En d'autres termes, la géométrie de l'attracteur \mathcal{A}_{S_x} est presque partout difféomorphiquement équivalente à celle de l'attracteur original \mathcal{A}_O . Etant donné la configuration très simple de l'attracteur standard \mathcal{A}_{S_x} et l'équivalence évidente avec l'attracteur original \mathcal{A}_O , la vérification topologique n'est pas utile. La représentation de l'attracteur standard \mathcal{A}_{S_x} accompagné de son application de premier retour du plan de Poincaré P_{S_x} à lui-même confirme ces assertions (fig. 4.11). Le plan de Poincaré P_{S_x} est défini par l'ensemble

$$P_{S_x} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Y = 0, \frac{\partial \phi_{0_x}}{\partial Y} > 0 \right\} \quad (4.15)$$

où ϕ_{t_x} représente le flot associé au système standard.

FIG. 4.11 – a) Attracteur standard \mathcal{A}_{S_x} obtenu par application de Φ_x sur une trajectoire chaotique et b) son application de premier retour de la section de Poincaré P_{S_x} à elle-même.

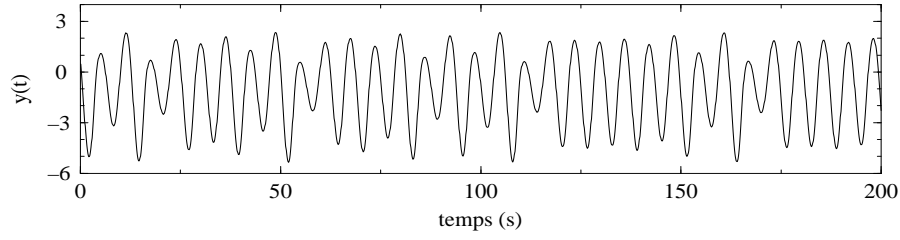
Observable $y(t)$

Nous connaissons maintenant l'histoire de la variable $y(t)$ (fig. 4.12). Dans ce cas, la transformation standard Φ_y reliant l'attracteur original \mathcal{A}_O et l'attracteur \mathcal{A}_{S_y} associé au système standard est de la forme :

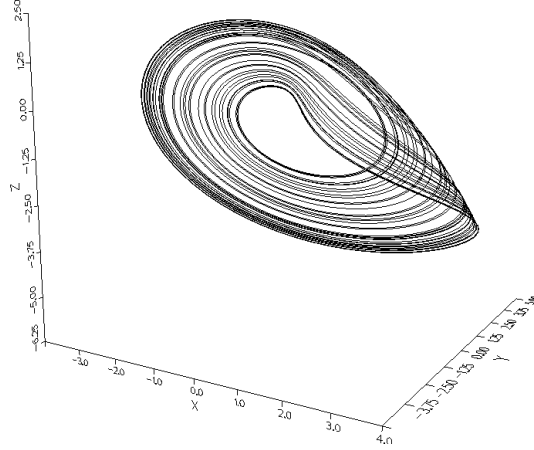
$$\Phi_y = \begin{cases} X = ax + (a^2 - 1)y - z \\ Y = y \\ Z = x + ay \end{cases} \quad (4.16)$$

La matrice jacobienne associée à cette transformation est définie par :

$$D\Phi_y = \begin{bmatrix} a & a^2 - 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

FIG. 4.12 – Evolution temporelle de la variable $y(t)$ du système de Rössler

Le jacobien ne s'annule jamais, aussi la transformation Φ_{S_y} définit un difféomorphisme entre l'attracteur original \mathcal{A}_O et l'attracteur standard \mathcal{A}_{S_y} (fig. 4.13). Il ne se pose alors aucun problème d'équivalence entre les deux objets. Nous avons là un exemple de reconstruction difféomorphiquement équivalente pour $m = d$. L'équivalence difféomorphique étant plus stricte que l'équivalence topologique, nous sommes assuré de la conservation des propriétés topologiques sous Φ_y .

FIG. 4.13 – a) Attracteur standard \mathcal{A}_{S_y} issu de la reconstruction à partir de la variable $y(t)$.

Observable $z(t)$

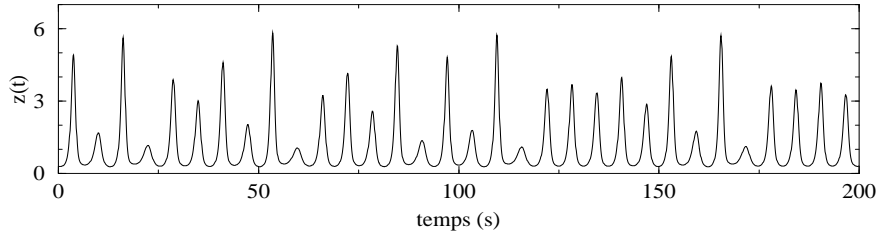
Pour terminer, nous choisissons l'évolution temporelle de la variable $z(t)$ du système de Rössler (fig. 4.14). Dans ce cas, la transformation standard Φ_z reliant l'attracteur original \mathcal{A}_O et l'attracteur \mathcal{A}_{S_z} associé au système standard est de la forme :

$$\Phi_z = \begin{cases} X = b + z(x - c) \\ Y = -bc + bx + c^2z - 2cxz - yz - z^2 + x^2z \\ Z = z \end{cases} \quad (4.18)$$

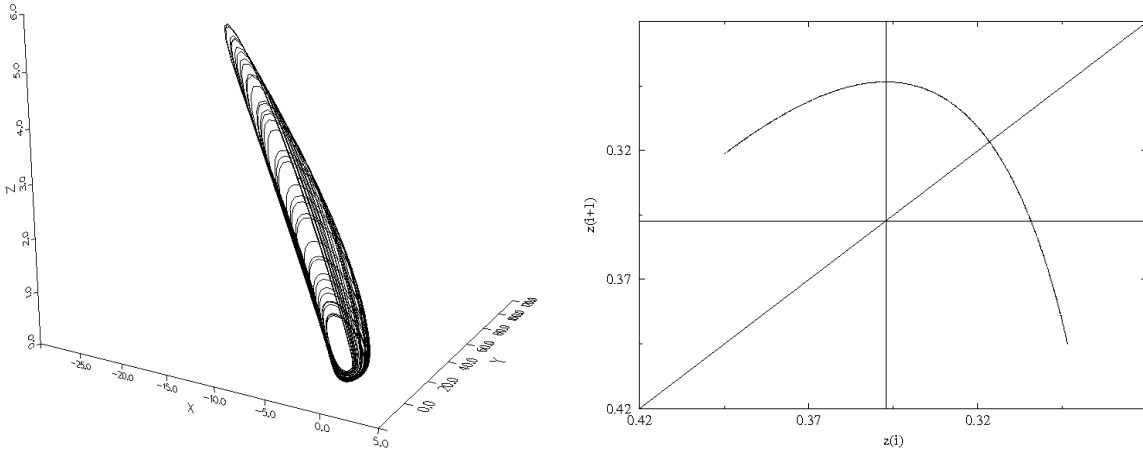
La matrice jacobienne de cette transformation est définie par :

$$D\Phi_z = \begin{bmatrix} z & 0 & x - c \\ b - 2cz - 2xz & -z & c^2 - 2cx - y - 2z + x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Le jacobien s'annule sur les plans d'équation $z_J^2 = 0$ et $x_J = 0$. Ces plans sont de mesure de Lebesgue nulle, aussi Φ_z est presque partout un plongement. En d'autres termes, la géométrie de l'attracteur \mathcal{A}_{S_z} est presque partout difféomorphiquement équivalente à celle de l'attracteur original \mathcal{A}_O . Bien que la représentation de l'attracteur

FIG. 4.14 – Evolution temporelle de la variable $z(t)$ du système de Rössler

standard \mathcal{A}_{S_z} soit relativement compressée (fig. 4.15), l'application de premier retour du plan de Poincaré P_{S_z} à lui-même est analogue à celle de l'attracteur original (fig. 4.11). Le plan de Poincaré P_{S_z} est défini par l'ensemble

FIG. 4.15 – a) Attracteur standard \mathcal{A}_{S_z} issu de la reconstruction à partir de la variable $z(t)$ et b) son application de premier retour de la section de Poincaré P_{S_z} à elle-même.

$$P_{S_z} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Y = 0, \frac{\partial \phi_{0_z}}{\partial Y} < 0 \right\} \quad (4.20)$$

où ϕ_{S_z} représente le flot associé au système standard issu de la variable $z(t)$.

Dire si la topologie de l'attracteur est conservée n'est pas aisé; en effet, la compression de l'attracteur rend difficile sa caractérisation. Cette déformation provient de la configuration de la variable $z(t)$. Alors que sur les observables $x(t)$ et $y(t)$, les variations d'amplitude sont perceptibles sur tous les extrema (minima et maxima), celles-ci ne sont perceptibles que sur les maxima de la variable $z(t)$ (fig. 4.14). Une compression des variations a eu lieu au niveau des minima. Ceci se comprend aisément sur des projections de l'attracteur original \mathcal{A}_O sur les plans xz ou yz (fig. 4.16) : la structure du repliement est difficilement identifiable sur ces projections en raison de l'écrasement des trajectoires au niveau des minima de la variable $z(t)$. Toutefois, une projection régulière de deux orbites de \mathcal{A}_{S_z} permet la vérification du patron proposé pour le système original [29].

Si les trois variables du système de Rössler offrent un attracteur standard presque partout difféomorphiquement équivalent à l'attracteur original, celles-ci ne se comportent pas toutes de manière identique du point de vue de la reconstruction : ainsi la variable $z(t)$ impose une compression de l'information sur la structure du repliement qui rend difficile la caractérisation de l'attracteur reconstruit.

4.4.2 Le système de Lorenz

Nous étudions maintenant le cas de la reconstruction du système le plus populaire de la dynamique des systèmes : celui proposé par E. N. Lorenz [31]. Il est défini par le système de trois équations différentielles

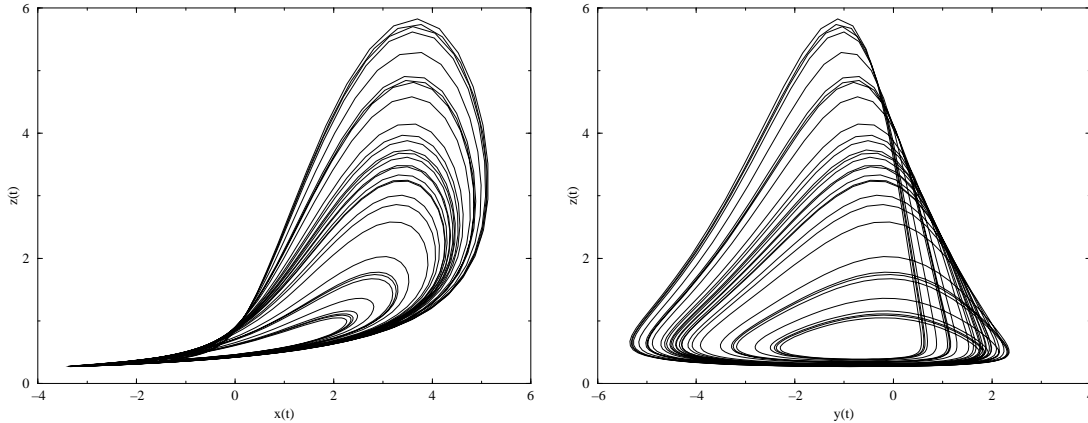


FIG. 4.16 – Projections de l’attracteur A_O du système de Rössler sur les plans a) xz et b) yz . La structure du repliement est pratiquement perpendiculaire à l’axe des z : l’information disponible est ainsi ”compressée”.

ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (4.21)$$

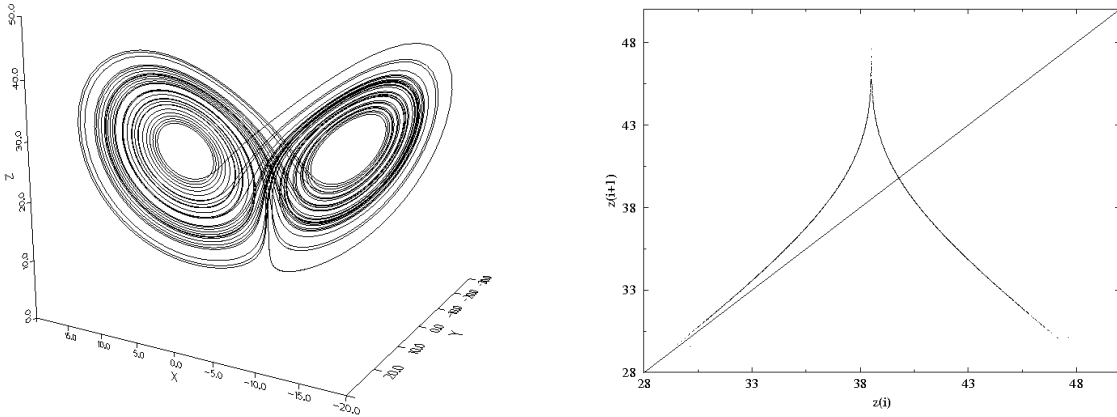


FIG. 4.17 – Attracteur solution du système de Lorenz pour les paramètres de bifurcation $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$.

La reconstruction de ce système est étudiée pour les paramètres de contrôle $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ pour lesquels le comportement asymptotique s’installe sur un attracteur étrange. Ce dernier est représenté figure 4.17 accompagné de son application de premier retour de l’ensemble de Poincaré $P_y = P_{y_+} \cup P_{y_-}$ à lui-même où les deux plans sont définis par

$$\begin{aligned} P_{y_+} &= \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid y = y_+, \frac{\partial \phi_0}{\partial y} < 0 \right\} \\ P_{y_-} &= \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid y = y_-, \frac{\partial \phi_0}{\partial y} > 0 \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec $y_{\pm} = \pm \sqrt{b(R - 1)}$ et où ϕ_t est le flot produit par le champ de vecteurs associé au système de Lorenz.

Rappelons que ce système est équivariant (cf. chapitre 3.3), c'est-à-dire que

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}, \gamma \mathbf{x}) = \gamma \mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.23)$$

où γ est une matrice orthogonale définissant l'équivariance [30]). Dans le cas du système de Lorenz, la matrice γ est définie par :

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Cette équivariance correspond à une symétrie axiale par rapport à la droite $x = y = 0$.

Observable $x(t)$

Seule l'histoire de l'observable $x(t)$ est connue (fig. 4.18). De manière à construire le système standard à

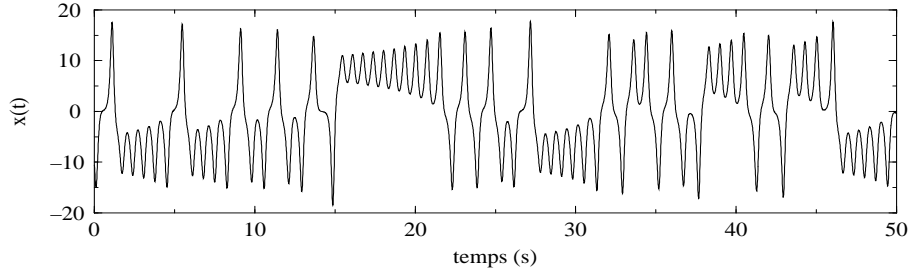


FIG. 4.18 – Evolution de la variable équivariante $x(t)$ du système de Lorenz.

partir du système original, la transformation standard Φ_x associée au système de Lorenz est calculée. Elle s'écrit sous la forme :

$$\Phi_x = \begin{cases} X = x \\ Y = \sigma(y - x) \\ Z = \sigma[(R + \sigma)x - (\sigma + 1)y - xz] \end{cases} \quad (4.25)$$

La matrice jacobienne $D\Phi_x$ a pour expression

$$D\Phi_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sigma & \sigma & 0 \\ \sigma[(R + \sigma) - z] & -\sigma(\sigma + 1) & -\sigma x \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Le jacobien s'annule dans le plan d'équation $x_J = 0$. Ce plan étant de mesure de Lebesgue nulle (probabilité de visite nulle), la transformation Φ_{S_x} est presque partout un difféomorphisme local.

Pourtant, les propriétés de symétrie de l'attracteur standard \mathcal{A}_{S_x} diffèrent de celles de l'original (fig. 4.19). En effet, l'observable $x(t)$ est une observable équivariante, c'est à dire que son évolution temporelle s'organise avec une symétrie globale par rapport à la valeur $x = 0$. De par la construction du système standard, il n'est pas possible de récupérer une variable non pourvue de la propriété d'équivariance. Aussi, toutes les observables du système standard sont équivariantes et la symétrie axiale du système original est perdue au profit d'une symétrie centrale par rapport à l'origine. La matrice γ de ce système standard est alors :

$$\gamma_{S_x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

L'application de premier retour de l'ensemble de Poincaré P_{S_x} à lui-même (fig. 4.19) est identique à l'application

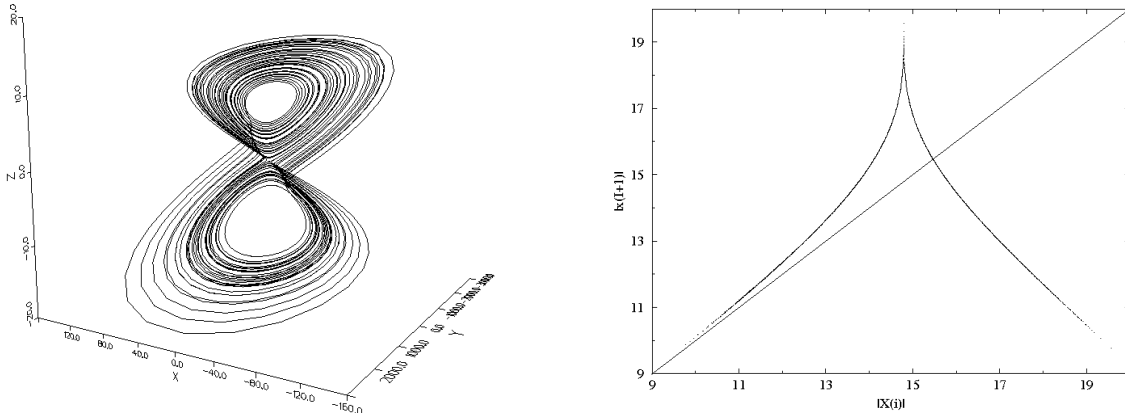


FIG. 4.19 – Attracteur standard A_{S_x} issu de la variable $x(t)$ du système de Lorenz accompagné de son application de premier retour.

de premier retour du système original. Cet ensemble P_{S_x} est défini par :

$$P_{S_x} = \begin{cases} \left\{ (X, Y, Z) \in R^3 \mid Y = 0, \frac{\partial \phi_{S_x}}{\partial Y} < 0 \right\} & \text{si } X > 0 \\ \left\{ (X, Y, Z) \in R^3 \mid Y = 0, \frac{\partial \phi_{S_x}}{\partial Y} > 0 \right\} & \text{si } X < 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

où ϕ_{t_x} est le flot associé au système standard issu de la variable x .

Les propriétés topologiques de cet attracteur sont équivalentes à celles de l'attracteur original A_O (la vérification est réalisée suivant celle effectuée sur l'attracteur A_{S_y} au paragraphe suivant). Ainsi, malgré des propriétés de symétrie différentes (symétrie centrale au lieu d'une symétrie axiale), la topologie est préservée. Du point de vue de la dynamique symbolique, aucune information n'est perdue. Seule de l'information sur les propriétés de symétrie de l'attracteur original est détruite par la transformation Φ_x .

Observable $y(t)$

La série temporelle est maintenant issue de l'évolution de la variable $y(t)$ (fig. 4.20). La transformation

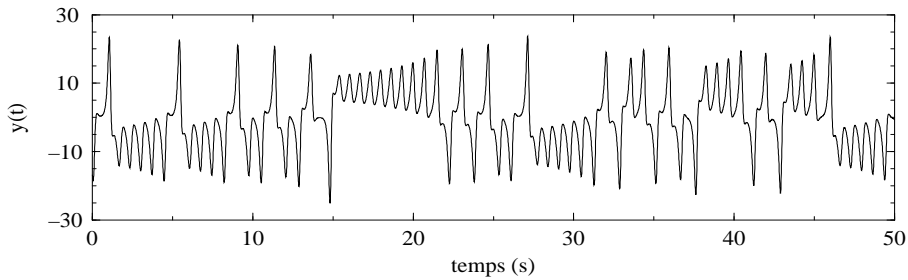


FIG. 4.20 – Evolution temporelle de la variable équivariante $y(t)$ du système de Lorenz.

standard Φ_y associée à cette variable s'écrit sous la forme :

$$\Phi_y = \begin{cases} X = -R(\sigma + 1)x + (R\sigma + 1)y + (\sigma + b + 1)xz - \sigma yz - x^2 y \\ Y = y \\ Z = Rx - y - xz \end{cases} \quad (4.29)$$

La matrice jacobienne $D\Phi_y$ a pour expression

$$D\Phi_y = \begin{bmatrix} -R(\sigma + 1) + (\sigma + b + 1)z - 2xy & (R\sigma + 1) - \sigma z - x^2 & +(\sigma + b + 1)x - \sigma y \\ 0 & 1 & 0 \\ R - z & -1 & -x \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Le jacobien s'annule sur la surface d'équation

$$z = \frac{2x^2}{\sigma} - \frac{Rb}{\sigma} \frac{x}{y} + R \quad (4.31)$$

qui se réduit à une droite lorsque $x = y = 0$. Une fois de plus, la transformation standard Φ_y définit presque partout un difféomorphisme entre \mathcal{A}_O et \mathcal{A}_{S_y} .

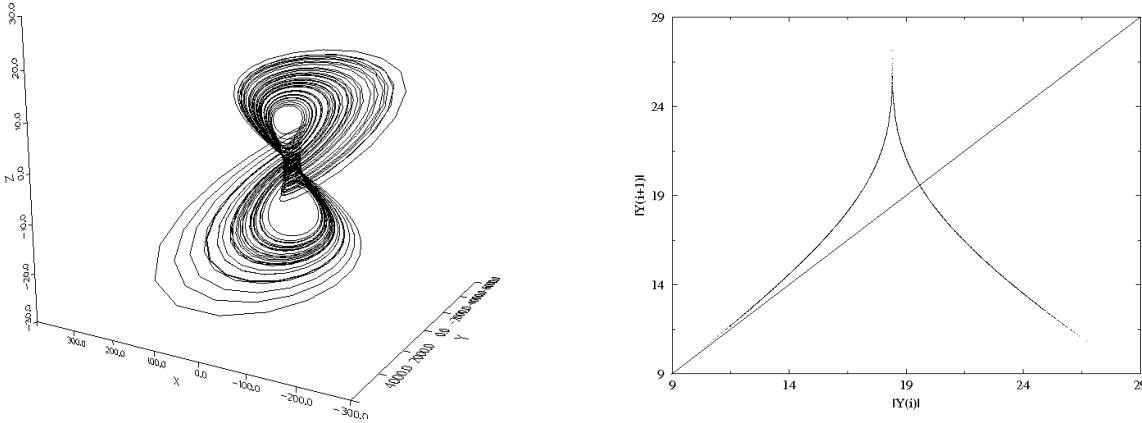


FIG. 4.21 – Attracteur standard \mathcal{A}_{S_y} accompagné de son application de premier retour.

Du point de vue des propriétés de symétrie, le comportement de l'observable $y(t)$ est similaire à celui de la variable $x(t)$. La série temporelle $y(t)$ offre un attracteur standard \mathcal{A}_{S_y} (fig. 4.21) dont la symétrie est centrale (par rapport à l'origine). L'application de premier retour de l'ensemble de Poincaré P_{S_y} à lui-même est identique à l'originale (fig. 4.21). L'ensemble de Poincaré P_{S_y} est constitué des plans P_{Z_+} et P_{Z_-} définis par :

$$\begin{aligned} P_{Z_+} &= \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z = 0, \frac{\partial \phi_{S_y}}{\partial Z} < 0, Y > Y_+ \right\} \\ P_{Z_-} &= \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z = 0, \frac{\partial \phi_{S_y}}{\partial Z} > 0, Y < Y_- \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

où Y_{\pm} sont les coordonnées des points fixes autour desquels se développent les deux ailes de l'attracteur \mathcal{A}_{S_y} et ϕ_{t_y} représente le flot du système standard. Etant donné la transformation standard Φ_y , les coordonnées Y_{\pm} de ces points fixes sont égales à leurs expressions dans l'espace des états original, soit $Y_{\pm} = y_{\pm} = \pm \sqrt{b(R-1)}$.

Un système équivariant est donc obtenu (fig. 4.21). Comme l'attracteur \mathcal{A}_{S_x} , l'attracteur \mathcal{A}_{S_y} est pourvu d'une symétrie centrale. La caractérisation topologique de cet attracteur doit donc se faire suivant une procédure analogue à celle développée pour le système de Lorenz [32]. Toutefois, les symétries centrales diffèrent des symétries axiales car elles ne préservent pas le sens des rotations mais les inversent. Une torsion de $-\pi$ sur une aile devient une torsion de $+\pi$ sur l'autre (fig. 4.22).

Si nous comptons les intersections orientées suivant la procédure développée pour les symétries axiales, tous les nombre de liaisons $L(N_1, N_2)$ seront nuls (à tout croisement signé sur une aile est associé un croisement de signe opposé sur l'autre). Ainsi, un patron peut être associé à une aile et le patron opposé à la seconde aile. Précisons que les matrices de liaisons ne seront pas opposées : en effet, la convention standard d'insertion [33] impose des croisements positifs au niveau du graphe d'insertion (cf. section 2.2.2).

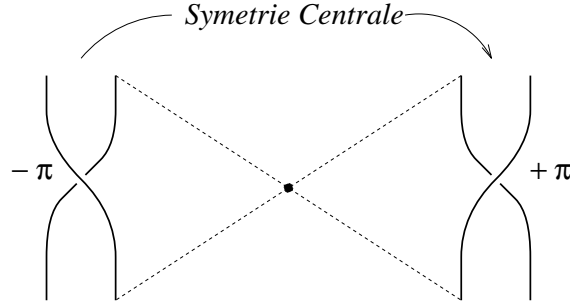


FIG. 4.22 – Inversion du sens de rotation par une symétrie centrale.

Les croisements orientés seront donc comptabilisés indépendamment sur chaque aile (rappelons qu'une aile est une bonne représentation du domaine fondamental [32]). Nous introduisons alors un nombre de liaisons $\bar{L}(N_1, N_2)$, non signé, défini par la relation suivante :

$$\bar{L}(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left| \sum_{p_1} \epsilon_{12}(p_1) \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{p_2} \epsilon_{12}(p_2) \right| \right] \quad (4.33)$$

où les p_i désignent les intersections sur une projection plane de la $i^{\text{ème}}$ aile et $\epsilon_{12}(p_i) = \pm 1$ suivant que l'intersection est positive ou non. Ce nombre de liaisons $\bar{L}(N_1, N_2)$ peut valider indifféremment un patron où son opposé. Nous ne pouvons donc pas trancher sur l'orientation des torsions d'un patron associé à un attracteur pourvu d'une symétrie centrale.

Ainsi, l'attracteur A_{S_y} doit présenter des nombres de liaisons, au signe près, en accord avec ceux obtenus sur le patron de l'attracteur de Lorenz. Pour vérifier cela, choisissons les orbites (1) et (101). L'orbite (1) est symétrique et l'orbite (101) est asymétrique. Les croisements orientés sont alors comptés sur une projection régulière de l'orbite (1) et de la paire d'orbites asymétriques (101) (fig. 4.23.a). Le nombre de liaisons est alors

$$\bar{L}(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left| \sum_{p_1} -2 \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{p_2} +2 \right| \right] = 1 \quad (4.34)$$

La relation

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} M(\sigma_i, \sigma_j) + N_{ins}(N_1, N_2) \right] \quad (4.35)$$

nous permet de vérifier ce nombre de liaisons à l'aide de la matrice de liaisons donnée au chapitre 3 (3.38). Nous trouvons en effet

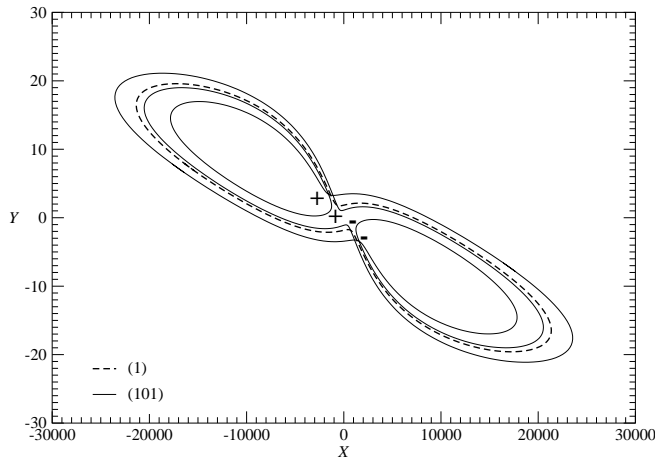
$$\begin{aligned} L(1, 101) &= \frac{1}{2} [2M_L(1, 1) + M_L(1, 0) + N_{ins}(1, 101)] \\ &= \frac{1}{2} [2 + 0 + 0] = +1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

où $N_{ins}(1, 101)$ est déterminé sur la figure (4.23.b). L'attracteur A_{S_y} peut donc être caractérisé indifféremment par le patron du système de Lorenz ou son opposé (fig. 4.24).

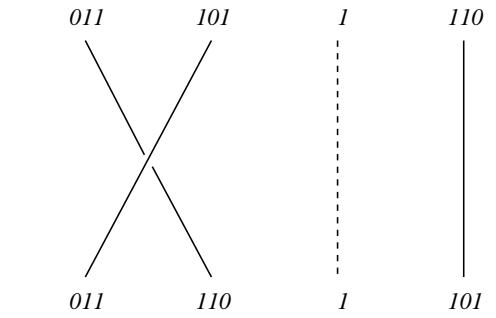
La topologie est donc préservée sous Φ_y au signe près, c'est à dire que de l'information sur le sens de rotation a été perdue sous l'action de Φ_y . Toutefois, l'organisation relative des orbites périodiques est préservée. L'évolution dynamique est donc préservée.

Observable $z(t)$

La variable $z(t)$ est la seule observable supposée connue (fig. 4.25). La variable z n'étant pas une variable équivariante, la reconstruction d'un portrait équivariant n'est pas permise. Aussi, est-ce sans surprise que l'on



(a) Projection régulière des orbites (1,101) : $L(1,101) = \frac{1}{4}(+4) = +1$



(b) Graphe d'insertion entre les orbites (1) et (101) : $N_{ins}(1,101) = 0$

FIG. 4.23 – Vérification du patron original sur l'attracteur A_{S_y} .

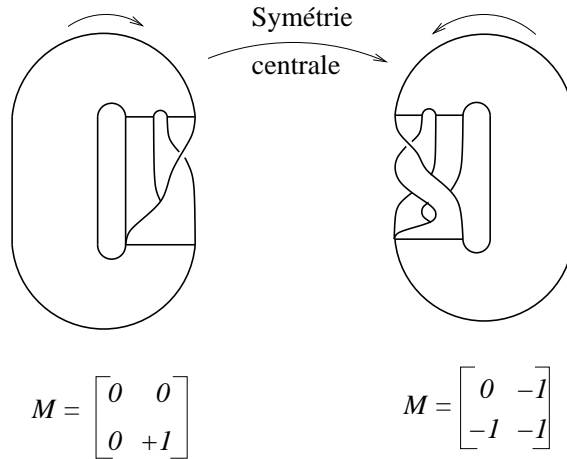


FIG. 4.24 – Patron de l'attracteur de Lorenz et son opposé : en raison de la convention standard d'insertion, les matrices de liaisons ne sont pas opposées l'une de l'autre.

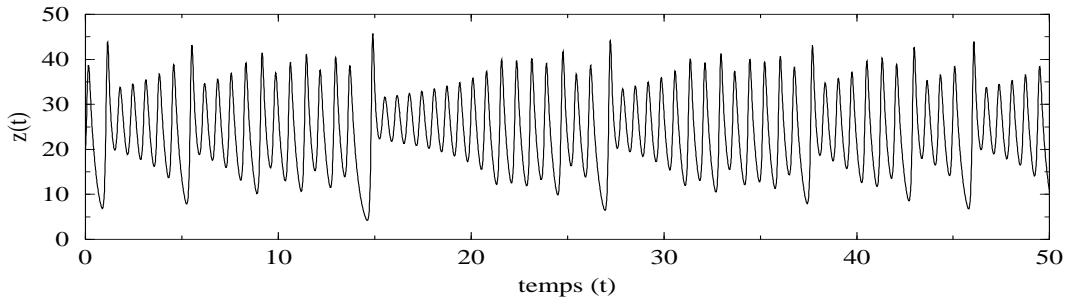


FIG. 4.25 – Evolution temporelle de la variable $z(t)$ du système de Lorenz.

constate que l'attracteur reconstruit n'est constitué que d'une seule aile. Cet attracteur à une aile renferme pourtant toute l'information topologique sur l'attracteur de Lorenz.

Dans ce cas, la transformation standard Φ_z est de la forme :

$$\Phi_z = \begin{cases} X = -bz + xy \\ Y = b^2z + Rx^2 + \sigma y^2 - (b + \sigma + 1)xy - x^2z \\ Z = z \end{cases} \quad (4.37)$$

L'application de Φ_z à une trajectoire évoluant sur les deux ailes de l'attracteur original permet l'obtention d'une projection de celle-ci sur une aile (fig. 4.26). La matrice jacobienne $D\Phi_z$ a pour expression :

$$D\Phi_z = \begin{bmatrix} 2Rx - (b + \sigma + 1)y - 2xz & 2\sigma y - (b + \sigma + 1)x & -b \\ y & x & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Son déterminant est nul lorsque

$$(R - z) = \frac{\sigma y^2}{x^2} \quad (4.39)$$

Cette relation définit une surface de mesure de Lebesgue nulle. Le jacobien de Φ_z s'annule aussi sur la droite définie par $(x = y = 0)$. Ces ensembles sont donc de mesure de Lebesgue nulle, aussi la transformation Φ_z est presque partout un difféomorphisme.

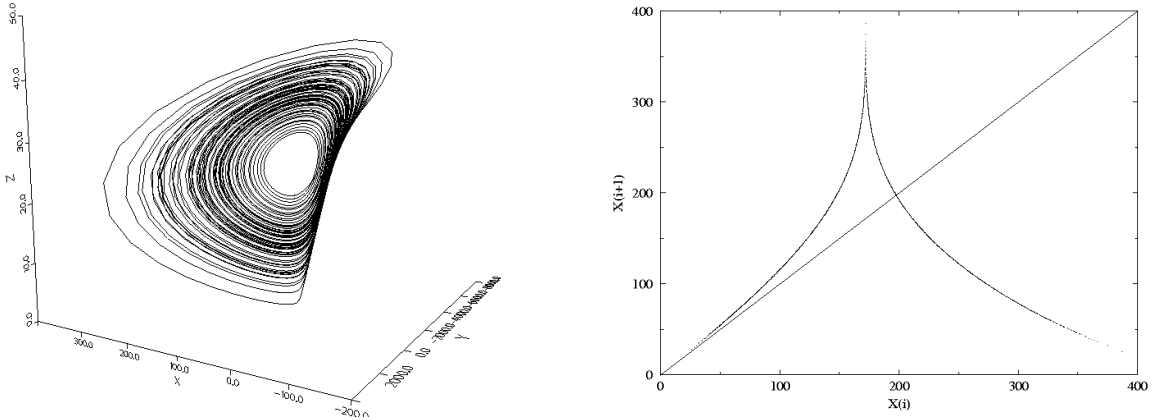
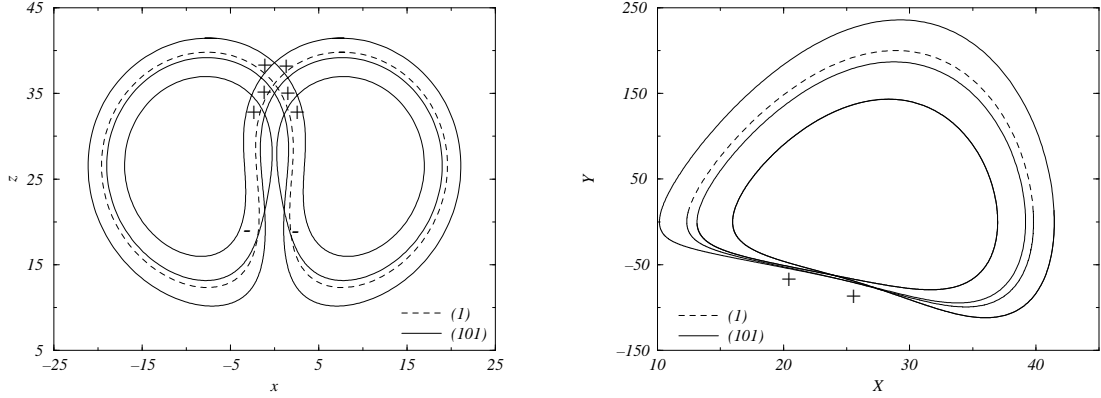


FIG. 4.26 – Projection d'une trajectoire chaotique de l'attracteur original de Lorenz sur une configuration à une seule aile sous l'action de Φ_z et son application de premier retour.

L'attracteur \mathcal{A}_{S_z} ne possède aucune propriété de symétrie. Sa caractérisation topologique est donc requise suivant la procédure des systèmes non-symétriques (comme celui de Rössler au chapitre 2). La transformation standard Φ_z associe à chaque orbite périodique de l'attracteur original \mathcal{A}_O une et une seule orbite de même période et codée par la même séquence symbolique (la partition est donnée par l'application de premier retour représentée fig. 4.26). Toute l'information topologique est donc conservée dans la mesure où un objet ζ n'est pas distingué de son compagnon $\gamma\zeta$. Par exemple, une paire d'orbites périodiques asymétriques (dégénérées) est transformée en une seule orbite périodique comme c'est le cas du point de vue de la dynamique symbolique (voir chapitre 3).

Nous vérifions maintenant que l'attracteur \mathcal{A}_{S_z} est caractérisé par le patron du système original. Le nombre de liaisons $L(1, 101)$ est déterminé sur une projection de la paire d'orbites correspondantes (fig. 4.27.a). Il est égal à celui obtenu sur l'attracteur original (4.27.b). La vérification aurait tout aussi bien pu être réalisée à l'aide de la relation (4.36). Malgré des propriétés de symétrie différentes, la topologie de l'attracteur reconstruit est identique à celle de l'attracteur original.



(a) Projection de la paire d'orbites (1, 101) issue de \mathcal{A}_O (b) Projection de la paire d'orbites (1, 101) issue de \mathcal{A}_{S_z}

FIG. 4.27 – Vérification du patron de l'attracteur standard par identification des nombre de liaisons.

Ce résultat conforte le découpage de l'attracteur de Lorenz en deux domaines fondamentaux, copies l'un de l'autre sous la transformation Φ_z : ces deux ensembles sont équivalents et ne doivent pas être distingués (cf. chapitre 3).

Reconstruction à partir de deux variables

Nous avons vu que le cas du système de Lorenz est plus délicat dans la mesure où la présence de la symétrie complique quelque peu le problème. G. P. King et I. Stewart [34] proposent une version du théorème de Takens pour des systèmes équivariants. L'une des conditions requises pour l'obtention d'une reconstruction correcte est que la variable utilisée soit elle-même équivariante. Cette condition est réalisée pour les variables x et y du système de Lorenz ; les portraits reconstruits dans un espace tridimensionnel à partir de ces variables sont effectivement pourvus de propriétés d'équivariance. Cependant celle-ci est définie par une matrice γ constituée d'éléments diagonaux égaux à (-1) et nuls sinon. La symétrie des portraits reconstruits est donc centrale (par rapport à l'origine) et non plus axiale (l'axe des z) comme sur le portrait original. Afin de retrouver l'équivariance originale, la reconstruction doit être réalisée à partir de deux quantités scalaires : une observable équivariante couplée à une seconde, invariante [34].

Ceci est réalisé à partir de la variable équivariante $x(t)$ et de la variable invariante $z(t)$. Nous utilisons ainsi la transformation suivante :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \sigma(y - x) = \dot{x} \\ Z = z \end{cases} \quad (4.40)$$

Le portrait de phase obtenu possède alors les mêmes propriétés de symétrie (fig. 4.28) : une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $(x = 0, y = 0)$.

4.4.3 Burke et Shaw

Si la propriété d'équivariance pose certaines difficultés vis à vis des méthodes de reconstruction, des systèmes dépourvus de symétrie peuvent, eux aussi, être sujets à des problèmes d'équivalence entre leurs variables. Le système proposé par Bill Burke et Robert Shaw [35] est un de ces exemples dont la configuration est propice à quelques problèmes. Le flot de Burke et Shaw est gouverné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -S(x + y) \\ \dot{y} = -Sxz - y \\ \dot{z} = Sxy + V \end{cases} \quad (4.41)$$

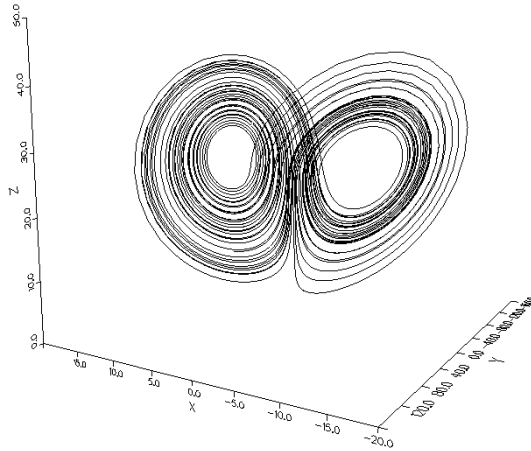


FIG. 4.28 – Attracteur reconstruit à partir de la variable équivariante $x(t)$ et de la variable invariante $z(t)$.

où S et V sont des paramètres de contrôle. Le paramètre S est fixé à 10 et V est considéré comme paramètre de contrôle variable. Ces équations gouvernent un flot présentant un ensemble attracteur qui n'est pas borné dans l'espace des états. En effet, le système (4.41) présente deux points fixes instables dénommés C_+ et C_- de coordonnées :

$$C_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \pm \left(\frac{V}{S}\right)^{1/2} \\ y_{\pm} = \mp \left(\frac{V}{S}\right)^{1/2} \\ z_{\pm} = \frac{1}{S} \end{cases} \quad (4.42)$$

et une droite particulière d'équation ($x_P = 0, y_P = 0$). Tout point appartenant à cette droite est condition initiale d'une solution qui s'étend à l'infini le long de l'axe z : ces solutions sont gouvernées par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = V \end{cases} \quad (4.43)$$

Dans les autres cas, l'action du flot est assimilée à des solutions en *entonnoir* vers cette solution singulière (fig. 4.29). L'attracteur généré par les équations (4.41) ressemble aux exemples de Lorenz et Rössler dans la mesure où sa structure est semblable à celle d'un ruban bidimensionnel. Ses frontières existent seulement au sens d'une densité de probabilité. Cet attracteur est représenté sur la figure 4.29 ainsi qu'une coupe prise sur la partie inférieure de l'attracteur représentant sa structure en entonnoir.

La route vers le chaos de ce système est la célèbre cascade de doublements de période ([36]-[37]). Nous allons nous intéresser à l'attracteur généré par le système d'équations différentielles (4.41) pour des valeurs des paramètres de contrôle $(S, V) = (10, 3.8115)$: pour ces paramètres de contrôle, la dynamique symbolique à deux lettres (peu après le point d'accumulation) est complète. Ceci se retrouve sur l'application de premier retour dans la section de Poincaré P_z qui présente une branche monotone croissante contiguë à la première bissectrice (fig. 4.30). Le plan P_z est défini par :

$$P_{z_{\pm}} = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid z = z_{\pm}, x > 0, \frac{\partial \phi_0(x, y, z)}{\partial z} < 0 \right\} \quad (4.44)$$

où ϕ_t est le flot associé au système de Burke et Shaw.

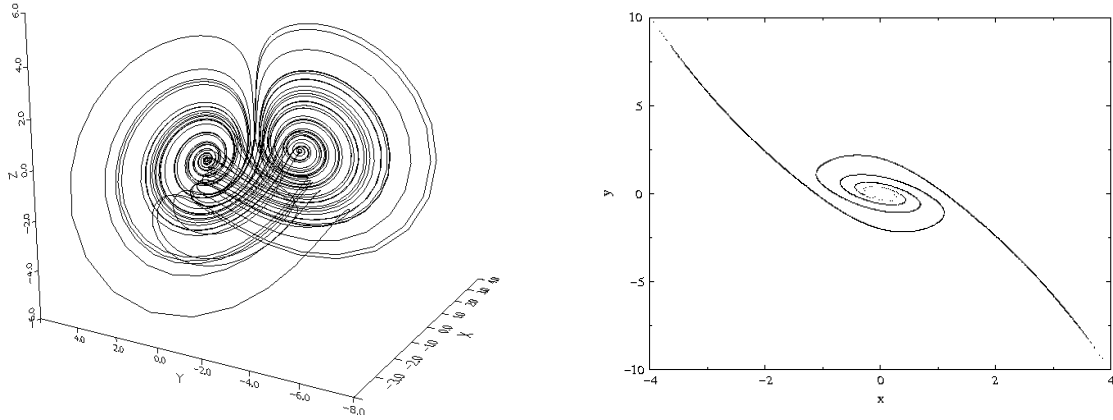


FIG. 4.29 – Attracteur de Burke et Shaw pour des paramètres de contrôle égaux à $(S, V) = (10, 13)$. Une coupe dans le plan d'équation $z = -1$ représente la structure en entonnoir de l'attracteur.

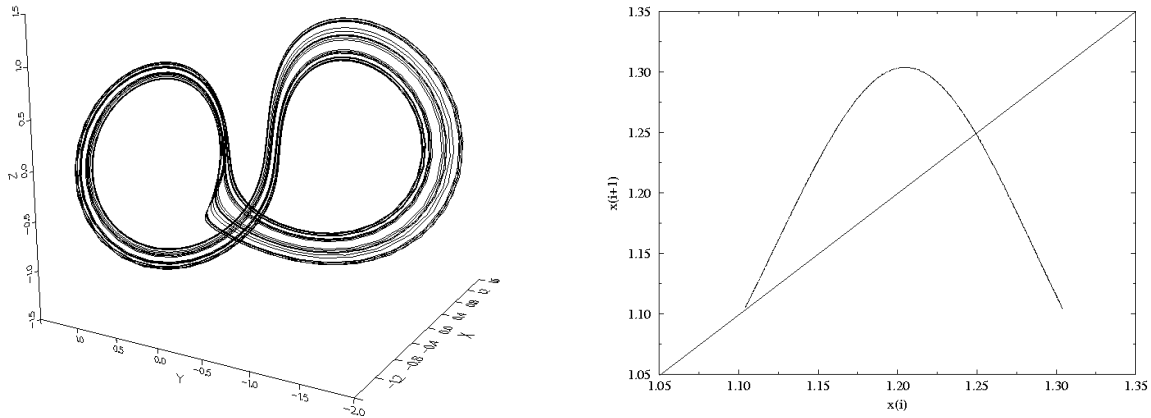


FIG. 4.30 – Attracteur solution du système de Burke et Shaw pour $(S, V) = (10, 3.8115)$ accompagné de son application de premier retour.

L'application de premier retour (fig. 4.30) définit une partition de l'attracteur qui permet la construction d'une dynamique symbolique. Nous utiliserons les symboles "2" et "3" pour chacune des branches monotones de l'application de premier retour. Ce choix est guidé par les torsions locales de chaque bande de l'attracteur définie par l'application de premier retour qui sont égales respectivement à $+2\pi$ et $+3\pi$. Le symbole "2" est affecté à la branche monotone croissante et le symbole "3" à la branche décroissante. Ces torsions locales sont déterminées après visualisation de l'attracteur. Si la parité des bandes est directement déterminée à partir de l'application de premier retour, la torsion locale est complètement obtenue après quelques considérations sur la structure de l'attracteur. L'attracteur présente une boucle qui est équivalente à une torsion globale d'un tour (en raison de l'isotopie entre une boucle et une rotation d'un tour, cf. Chapitre 1). Nous pouvons alors construire le patron de cet attracteur (Fig. 4.31). La population d'orbites périodiques de cet attracteur est reportée dans le tableau (4.1).

Il nous reste maintenant à vérifier ce patron. Pour cela, une projection de la paire d'orbites (3, 32) est réalisée (fig. 4.32). Le nombre de liaisons $L(3, 32)$ est égal à celui déterminé sur le patron (fig. 4.31).

TAB. 4.1 – Population d'orbites périodiques instables de l'attracteur de Burke et Shaw pour $(S, V) = (10, 3.8115)$.

période	nombre	coordonnée en x	coordonnée en y	séquence
1	2	1.249520330969671	-1.733995584312329	3
		1.103460712965665	-1.442788982632999	2
2	1	1.278643178629651	-1.794500469624336	32
3	2	1.293379206934682	-1.825426849507418	322
		1.287286934211652	-1.812616155758162	323
4	3	1.299980227571048	-1.839347507999089	3222
		1.298613143318114	-1.836461380077897	3223
		1.282828803697774	-1.803263531476994	3233
5	6	1.302773778085942	-1.845251411380812	32222
		1.302463828030293	-1.844596959974027	32223
		1.296101042652131	-1.831161132526585	32233
		1.295178380688817	-1.829215912769560	32232
		1.286267107502502	-1.810474690880866	32332
		1.284687040328182	-1.807158654747949	32333
6	9	1.303912974113894	-1.847660729945948	322222
		1.303849606269639	-1.847526995198401	322223
		1.301321304457583	-1.842180638917310	322233
		1.301108345337920	-1.841730727891827	322232
		1.297551734501512	-1.834220236610435	322332
		1.297193889127679	-1.833465630419624	322333
		1.293964228802586	-1.826658040310341	322323
		1.283825196249410	-1.805351636490169	323333
		1.283059416189209	-1.803746069025063	323332
7	18	1.304370998466096	-1.848631472709805	3222222
		1.304364485811007	-1.848616045363675	3222223
		1.303363195854872	-1.846497626695096	3222233
		1.303317172991636	-1.846400554217184	3222232
		1.301909828463069	-1.843425263571348	3222332
		1.301827989722876	-1.843251120696329	3222333
		1.300532546601797	-1.840513729221170	3222323
		1.300397693562734	-1.840229709705528	3222322
		1.298286428002744	-1.835771549127268	3223322
		1.298109894002035	-1.835399535728496	3223323
		1.296636068778684	-1.832289693729757	3223333
		1.296527997310477	-1.832062596916984	3223332
		1.294742460699932	-1.828298370726084	3223232
		1.294516467170998	-1.827820928983970	3223233
		1.286810975585124	-1.811615624328446	3233233
		1.286466926686574	-1.810893702199210	3233232
		1.284540279664690	-1.806851050792935	3233332
		1.284204486883903	-1.806146428323847	3233333

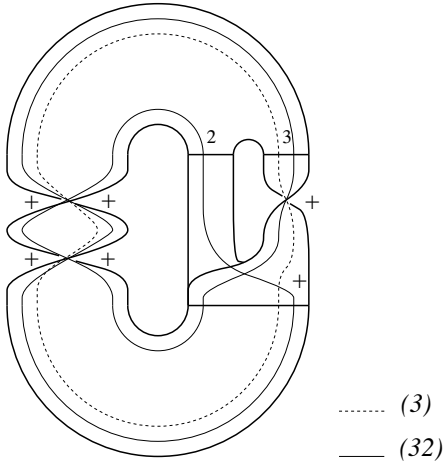


FIG. 4.31 – Patron de l'attracteur de Burke et Shaw pour des paramètres de contrôle égaux à $(S, V) = (10, 3.8115)$. Une paire d'orbites périodiques est construite sur le patron.

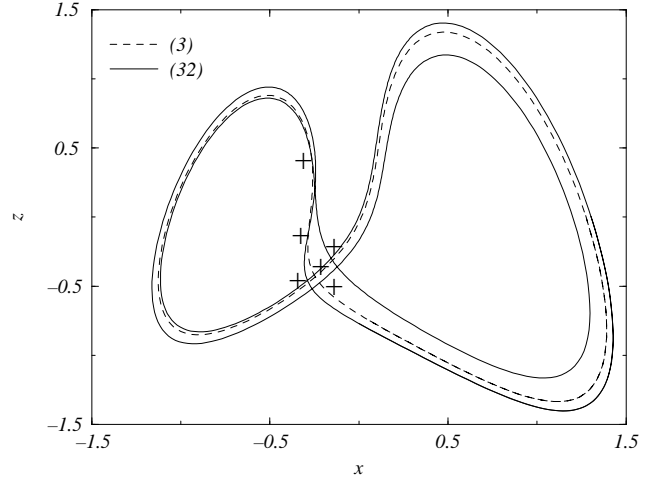


FIG. 4.32 – Projection de la paire d'orbites périodiques codées respectivement par les séquences (3) et (32). $L(3, 32) = +3$.

Observable $x(t)$

Seule l'observable $x(t)$ est connue (fig. 4.33). La transformation Φ_x est alors de la forme :

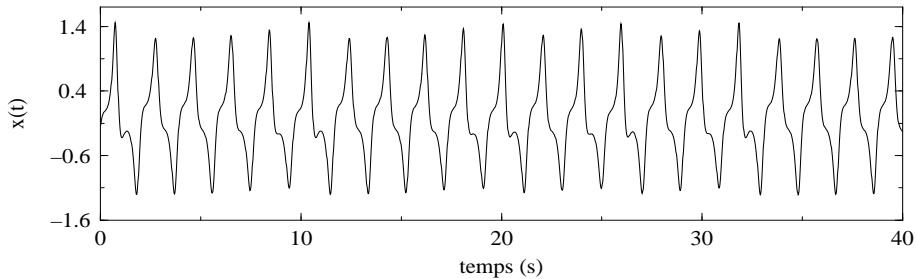


FIG. 4.33 – Evolution temporelle de la variable $x(t)$ du système de Burke et Shaw.

$$\Phi_x = \begin{cases} X = x \\ Y = -S(x + y) \\ Z = S^2x + S(S + 1)y + S^2xz \end{cases} \quad (4.45)$$

La matrice jacobienne $D\Phi_x$ a pour expression :

$$D\Phi_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -S & -S & 0 \\ S^2(1 + z) & S(S + 1) & S^2x \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Le jacobien s'annule sur le plan d'équation $x = 0$. Cet ensemble est de mesure de Lebesgue nulle, aussi la transformation définit presque partout un difféomorphisme local. L'attracteur \mathcal{A}_{S_x} est toujours pourvu de la torsion globale d'un tour (fig. 4.34) et son application de premier retour est identique à celle de l'attracteur original (fig. 4.34). La section de Poincaré est définie par

$$P_{S_x} = \left\{ (X, Y, Z) \in R^3 \mid Y = 0, \frac{\partial \phi_{0_x}}{\partial Y} < 0, X > 1/2 \right\} \quad (4.47)$$

où ϕ_{t_x} est le flot associé au système standard issu de la variable x . La population d'orbites périodiques est donc préservée sous la transformation Φ_x . La topologie de l'attracteur est donc conservée.

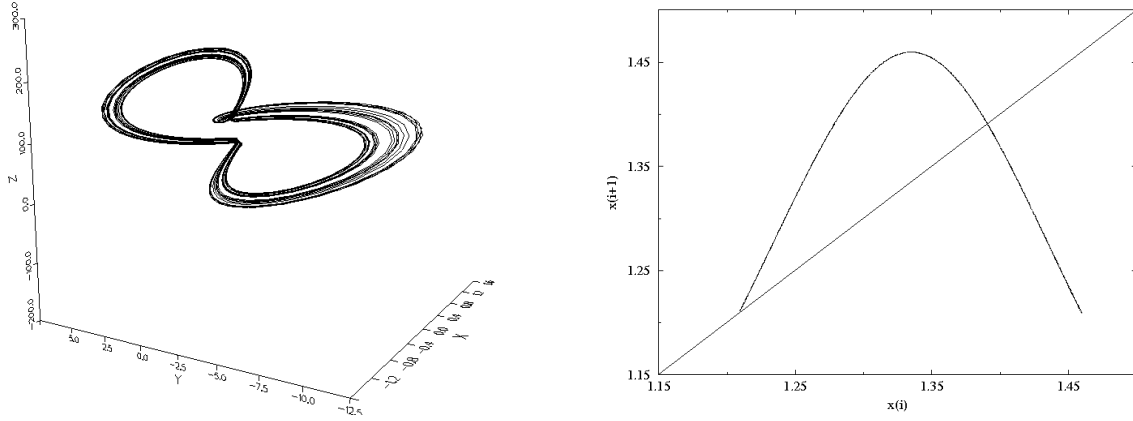


FIG. 4.34 – Attracteur standard A_{S_x} du système de Burke et Shaw accompagné de son application de premier retour.

Observable $y(t)$

Toute l'information sur le système est issue de l'évolution temporelle de la variable $y(t)$ (fig. 4.35). La transformation standard Φ_y associée au système de Burke et Shaw s'écrit :

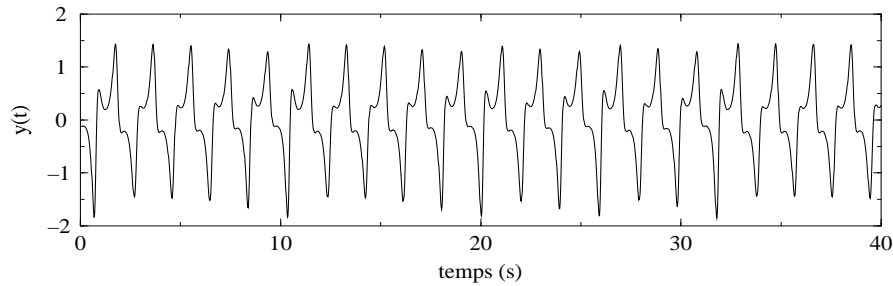


FIG. 4.35 – Evolution temporelle de la variable $y(t)$ du système de Burke et Shaw.

$$\Phi_y = \begin{cases} X = -SVx + y + S(S+1)xz + S^2yz - S^2x^2y \\ Y = y \\ Z = -Sxz - y \end{cases} \quad (4.48)$$

La matrice jacobienne associée à cette transformation a la forme suivante :

$$D\Phi_y = \begin{bmatrix} -SV + S(S+1)z - 2S^2xy & 1 + S^2z - S^2x^2 & S(S+1)x + S^2y \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sx & -1 & -Sx \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Le jacobien s'annule lorsque

$$z = -\frac{Vx}{Sy} - 2Sx^2, \quad y \neq 0 \quad (4.50)$$

Cette condition définit une surface d'un type analogue à celle rencontrée sur le système de Lorenz. Sa mesure de Lebesgue est nulle, la transformation Φ_y est donc presque partout un difféomorphisme. Le portrait standard

\mathcal{A}_{S_y} (fig. 4.36) offre une topologie similaire à celle de l'attracteur original et l'application de premier retour dans la section de Poincaré P_{S_y} est identique à l'originale. La section de Poincaré est définie par

$$P_{S_y} = \left\{ (X, Y, Z) \in R^3 \mid Z = 0, \frac{\partial \phi_{0_y}}{\partial Z} > 0, Y < -1 \right\} \quad (4.51)$$

où ϕ_{S_y} est le flot associé au système standard issu de la variable y .

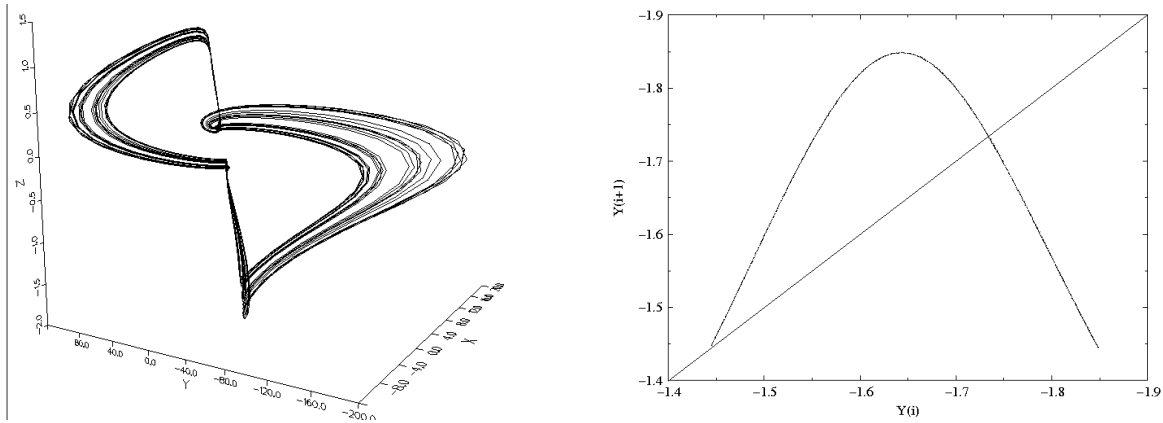


FIG. 4.36 – Attracteur standard \mathcal{A}_{S_y} issu de la variable $y(t)$ du système de Burke et Shaw accompagné de son application de premier retour.

Malgré cela, l'équivalence topologique n'est pas évidente. La vérification du patron est réalisée à l'aide de la paire d'orbites (3,32) suivant la procédure développée au début de cette section. Le nombre de liaisons $L(3, 32)$ de l'attracteur \mathcal{A}_{S_y} compté sur la projection régulière de la paire (3, 32) (fig. 4.37) est égal à celui compté sur l'attracteur original \mathcal{A}_O (fig. 4.32). Les propriétés topologiques sont donc préservées sous Φ_y .

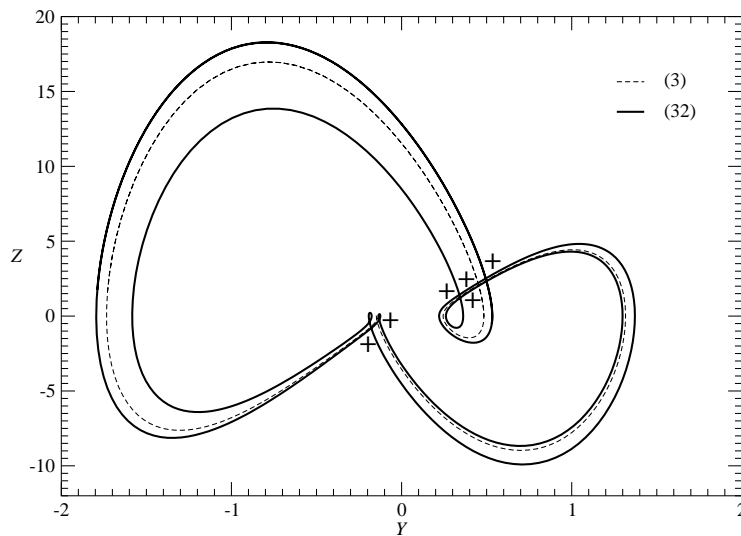


FIG. 4.37 – Projection de la paire d'orbites (3,32) : $L(3, 32) = \frac{1}{2}(+6) = +3$.

Observable $z(t)$

Nous travaillons maintenant à partir de la variable $z(t)$ du système de Burke et Shaw (fig. 4.38). La transformation standard Φ_z a pour expression :

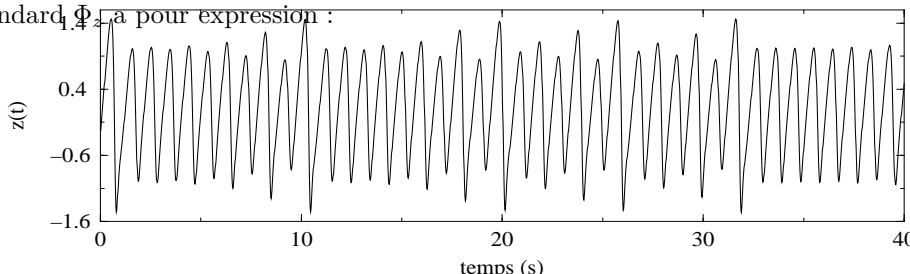


FIG. 4.38 – Evolution temporelle de la variable $z(t)$ du système de Burke et Shaw.

$$\Phi_z = \begin{cases} X = Sxy + V \\ Y = -S^2y^2 - S(S+1)xy - S^2x^2z \\ Z = z \end{cases} \tag{4.52}$$

La matrice jacobienne s'écrit sous la forme :

$$D\Phi_z = \begin{bmatrix} Sy & Sx & 0 \\ -S(S+1)y - 2S^2xz & -2S^2y - S(S+1)x & -S^2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

Le jacobien s'annule sur la surface d'équation $y^2 = x^2z$ et sur la droite $x = y = 0$. Ces ensembles sont de mesure de Lebesgue nulle. La transformation Φ_z est donc presque partout un difféomorphisme.

Toutefois, l'évolution temporelle de cette variable nous autorise à penser qu'elle n'a pas la même "vision" de l'attracteur que ses deux sœurs. A l'instar du système de Lorenz, l'attracteur de Burke et Shaw est pourvu de deux ailes. Cependant, le champ de vecteurs n'est pas équivariant ; aucune considération de symétrie n'est donc à prendre en compte. Si les variables $x(t)$ et $y(t)$ ont une pseudo-période en accord avec le temps de récurrence à une section de Poincaré, il n'en est pas de même pour la variable $z(t)$. En effet, celle-ci ne distingue pas les deux ailes et n'a aucune information sur la configuration en boucle de l'attracteur. Aussi l'attracteur standard \mathcal{A}_{S_z} ne présente qu'une seule aile (Fig. 4.39). La structure en boucle est perdue et seule une torsion globale d'un demi-tour est restaurée sur l'attracteur \mathcal{A}_{S_z} .

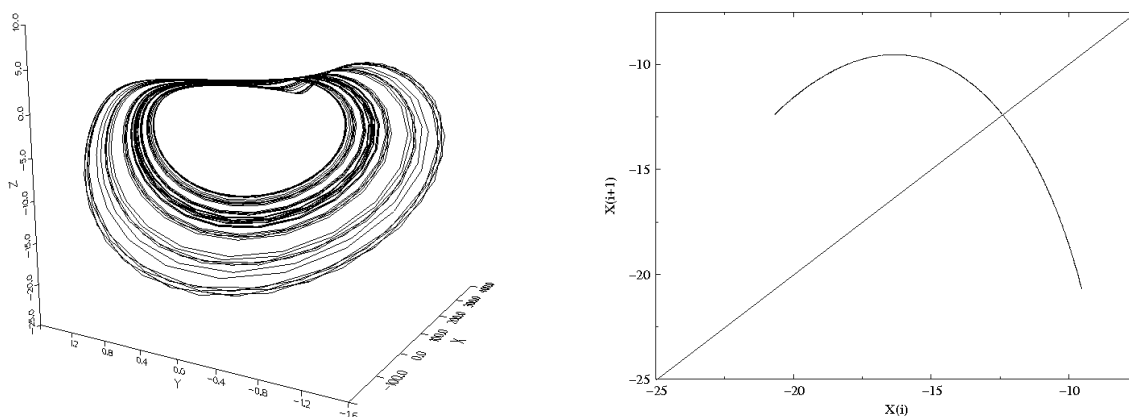


FIG. 4.39 – Attracteur standard \mathcal{A}_{S_z} issu de la variable $z(t)$ du système de Burke et Shaw accompagné de son application de premier retour.

L'équivalence topologique est donc perdue. Le patron de l'attracteur standard diffère donc de celui de l'attracteur original (fig. 4.40). Sa matrice de liaison est de la forme :

$$M_{S_z} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Toutes les torsions sont maintenant négatives alors qu'elles étaient positives sur l'attracteur original. La dynamique symbolique est donc définie à l'aide des symboles "1" et "2" respectant les torsions locales de chaque bande.

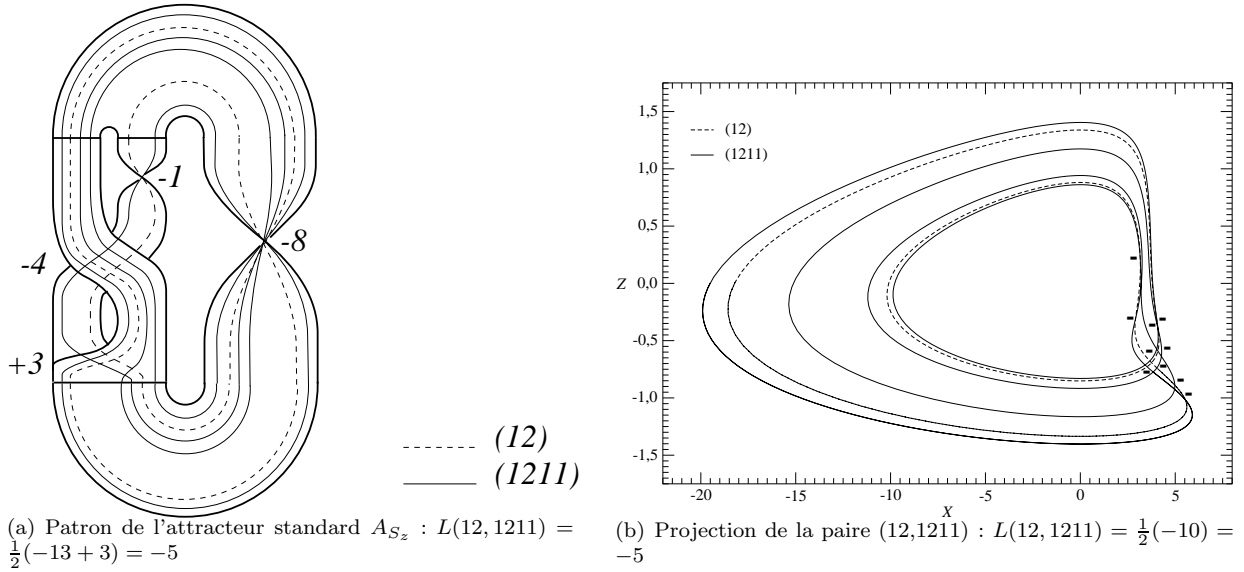


FIG. 4.40 – Vérification du patron de l'attracteur standard A_{S_z}

De plus l'application de premier retour dans le plan de Poincaré P_{S_z} définie par

$$P_{S_z} = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z = 0, \frac{\partial \phi_{0_z}}{\partial Z} < 0 \right\} \quad (4.55)$$

est tronquée (fig. 4.39), c'est à dire que la population d'orbites périodiques a été élaguée lors de l'application de la transformation Φ_z ! L'équivalence entre l'attracteur original \mathcal{A}_O et l'attracteur standard \mathcal{A}_{S_z} est donc fortement compromise. Pour comprendre cet élagage, nous devons examiner comment sont transformées les orbites périodiques sous Φ_z . En supposant que chaque orbite voit sa période doublée sous Φ_z , et après extraction de la population d'orbites périodiques sur l'attracteur standard \mathcal{A}_{S_z} (reportée dans le tableau 4.2), nous pouvons définir un opérateur $\tilde{\Phi}_z$ agissant sur la dynamique symbolique des orbites originales comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_z(3) = 12 \\ \tilde{\Phi}_z(2) = 11 \end{cases} \quad (4.56)$$

Nous pouvons vérifier que la parité d'un symbole est conservée sous l'action de l'opérateur $\tilde{\Phi}_z$. Ainsi le symbole impair est transformé en une séquence impaire de symboles. Nous pouvons vérifier l'action de $\tilde{\Phi}_z$ sur les deux orbites (3) et (32) :

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_z(3) = (12) \\ \tilde{\Phi}_z(32) = (1211) \end{cases} \quad (4.57)$$

TAB. 4.2 – Population d’orbites périodiques instables de l’attracteur standard A_{S_z} du système de Burke et Shaw.

période	nombre	séquence
1	1	1
2	1	12
3	0	
4	1	1211
5	0	
6	2	1211111 1211121
7	0	
8	3	12111111 12111112 12111212
9	0	
10	6	1211111111 1211111112 1211111212 1211111211 1211121211 1211121212

Si nous appliquons l’opérateur $\tilde{\Phi}_z$ à chacune des orbites du tableau 4.1, nous retrouvons la population extraite de l’attracteur standard A_{S_z} (tableau 4.2). Toutes les orbites de période impaire ont été élaguées sous $\tilde{\Phi}_z$ (qui double systématiquement la période des orbites) exceptée l’orbite de période 1 codée par la séquence (1). En effet, $\tilde{\Phi}_z(2) = (11) = (1)$. La transformation $\tilde{\Phi}_z$ compresse de l’information essentielle sur la dynamique de l’attracteur original. L’utilisation de la variable $z(t)$ ne peut donc être requise pour la caractérisation du système original. Un plongement dans une dimension supérieure doit donc être envisagée. Souhaitant utiliser le bénéfice de notre capacité à visualiser des espaces de dimension 3, nous nous bornerons à ceux-ci.

Si le problème de l’équivalence des variables est relativement bien formalisé dans le cas des systèmes équivariants, celui des systèmes à configuration pathologique n’a pas encore fait l’objet d’un formalisme mathématique. Un lien peut cependant être fait avec les problèmes des plissements qui apparaissent lorsque des surfaces à courbure négative sont projetées dans des espaces de dimension 2 (voir Section 5.3). Un plissement (ou le recouvrement d’une portion de l’attracteur par une autre lors de la projection) implique une perte d’information sur la structure topologique de l’attracteur. Une projection dans le plan $x - y$ de l’attracteur de Burke et Shaw n’offre aucun plissement hormis au voisinage du repliement (fig. 4.41.a). Par contre, sur une projection dans le plan $x - z$ ou $y - z$ apparaît une large zone cachée par une autre : la variable z ne peut différencier celles-ci, de l’information est perdue !

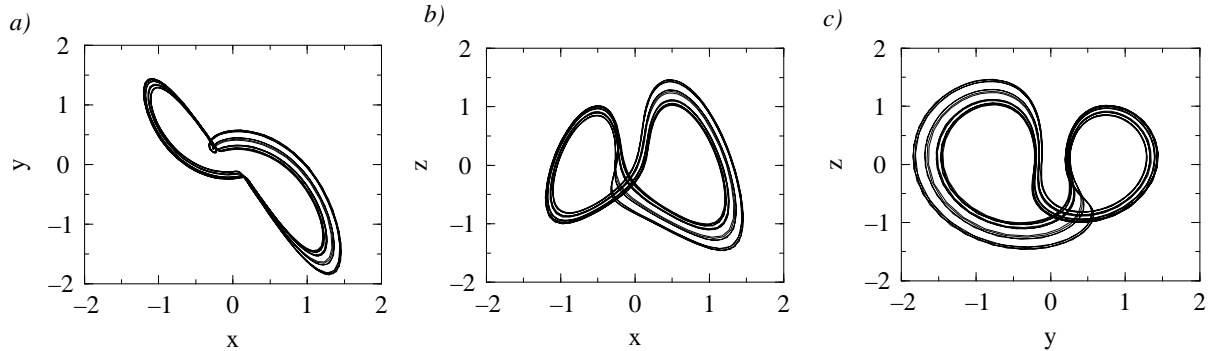


FIG. 4.41 – Différentes projections de l'attracteur de Burke et Shaw : a) dans le plan $x - y$, b) dans le plan $x - z$ et dans le plan $y - z$.

4.5 Conclusion

Si l'équivalence des variables d'un système de dimension d a été démontrée par F. Takens [3], elle n'est vérifiée que dans les cas où la dimension m de l'espace de reconstruction est supérieure à $2d + 1$. Nous avons vu que dans certains cas, un plongement pouvait être obtenu dans un espace de dimension égale à celle du système original (variable y du système de Rössler).

Une restriction supplémentaire survient dans le cas des systèmes équivariants où plusieurs variables sont parfois nécessaires pour restaurer les bonnes propriétés de symétrie (cas du système de Lorenz). Toutefois, la topologie est le plus souvent conservée; seule la variable z du système de Burke et Shaw ne la conserve pas. Lorsqu'elle l'est, la caractérisation dynamique (basée sur la partition de l'attracteur et la construction d'une dynamique symbolique) est alors possible. La perte des propriétés de symétrie d'un attracteur induit une perte d'information sur les bifurcations probables qui apparaissent sous des variations des paramètres de contrôle mais pas nécessairement sur la topologie, c'est à dire que la dynamique peut être préservée.

Si dans la plupart des cas étudiés il y a conservation des propriétés topologiques, il survient des cas pathologiques (variable z du système de Burke et Shaw) pour lesquels celles-ci ne sont pas conservées. Face à de tels cas, aucune prescription ne peut être actuellement proposée pour récupérer l'information perdue. Aussi l'utilisation d'un espace reconstruit doit donc être réalisée avec beaucoup de prudence.

Pratiquement, l'utilisation d'un espace reconstruit de basse dimension garantit toujours une bonne connaissance de l'observable; en d'autres termes, bien que la topologie puisse être changée, l'évolution temporelle de l'observable peut toujours être correctement prédite lorsque nous utilisons le système standard, et ce quelle que soit la dimension de l'espace reconstruit.

Bibliographie

- [1] **N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw.** Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, 45 (9), pp.712-716, 1980.
- [2] **G. U. Yule.** On a method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with special references to Wolfer's Sunspot Numbers, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A 226, pp.267-298, London, 1927.
- [3] **F. Takens.** Detecting Strange Attractors in Turbulence, in : *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, eds. D. A. Rand and L. S. Young, pub. Springer-Verlag, New York, pp. 366-381, 1981.
- [4] **J. C. Roux, H. Swinney.** Topology of chaos in a Chemical reaction, in *Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics*, eds. C. Vidal, A. Pacault, Springer-Verlag, 1981.
- [5] **J. P. Eckmann, D. Ruelle.** Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Revue Moderne de Physique*, 57, pp. 617-656, 1985.
- [6] **D. S. Broomhead, G. P. King.** Extracting qualitative dynamics from experimental data, *Physica D*, 20, pp. 217-236, 1986.
- [7] **J. Cremers, A. Hübler.** Construction of Differential Equations from Experimental Data, *Z. Naturforsch*, 42 a, pp. 797-802, 1987.
- [8] **M. Casdagli.** Nonlinear Prediction of chaotic time series, *Physica D*, 35, pp. 335-356, 1988.
- [9] **J. L. Breeden, A. Hübler.** Reconstructing Equations of Motion from Experimental Data with Hidden Variables, *Physical Review A*, 42 (10), pp. 5817-5826, 1990.
- [10] **M. Casdagli, S. Eubank, J. D. Farmer, J. Gibson.** State Space Reconstruction with Noise, *Physica D*, 51, pp. 52-98, 1991.
- [11] **J.F.Gibson, J. D. Farmer, M. Casdagli, S. Eubank.** An Analytic Approach to Pratical State Space Reconstruction, *Physica D*, 57, pp. 1-30, 1992.
- [12] **G. Gouesbet.** Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series, *Physical Review A*, 43 (10), pp. 5321-5331, 1991.
- [13] **G. Gouesbet.** Reconstruction of Standard and Inverse Vector Fields Equivalent to a Rössler system, *Physical Review A*, 44 (10), pp. 6264-6280, 1991.
- [14] **G. Gouesbet.** Reconstruction of Vector Fields : the Case of Lorenz System, *Physical Review A*, 46(4), pp. 1784-1796, 1992.
- [15] **G. Gouesbet, J. Maquet.** Construction of phenomenological models from numerical scalar time series, *Physica D*, 58, pp. 202-215, 1992.
- [16] **G. Gouesbet, C. Letellier.** Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets, *submitted to Physical Review E*.
- [17] **O. E. Rössler.** An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters*, 57A (5), pp.397-398, 1976.
- [18] cité in **J. Gleick.** *La théorie du chaos*, Flammarion, Paris, 1989,
- [19] **N. Gershenfeld.** *An Experimentalist's Introduction to the Observation of Dynamical Systems* , in Directions in Chaos, vol.2, édité par Hao Bai Lin, World Scientific Publishing, Singapore, pp. 310-384, 1988.

- [20] **Th. Buzug, T. Reimers, G. Pfister.** Optimal Reconstruction of Strange Attractors from Purely Geometrical Arguments, *Europhysics Letters*, 13 (7), pp. 605-610, 1990.
- [21] **Th. Buzug, G. Pfister.** Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors, *Physical Review A*, 45 (10), pp. 7073-7984, 1992.
- [22] **J. H. Nese, J. A. Dutton, R. Wells.** Calculated Attractor Dimensions for Low-Order Spectral Models, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 44 (15), pp. 1950-1969, 1987.
- [23] **J. P. Luminet.** *Les trous noirs*, Editions Belfont/Sciences, Paris, 1987.
- [24] **T. Sauer, J. A. Yorke, M. Casdagli.** Embedology, *Journal of Statistical Physics*, 65 (3/4), pp. 579-616, 1991.
- [25] **A. Mischenko, A. Fomenko.** *A course of differential geometry and topology*, MIR Publishers, Moscow, 1988.
- [26] **H. Whitney.** Differentiable Manifolds, *Annals of Mathematics*, 37, pp.645-680, 1936.
- [27] **G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, X. J. Hou.** Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski, *Journal of Nonlinear Sciences*, 1, pp. 147-173, 1991.
- [28] **M. Demazure** *Catastrophes et Bifurcations*, Ellipse, Paris, 1989.
- [29] **C. Letellier, G. Gouesbet.** Topological equivalence between reconstructed and original strange attractors, submitted to *Physical Review E*.
- [30] **B. Fielder.** *Global Bifurcations of Periodic Solutions with Symmetry*. Lecture Notes in Mathematics 1309, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [31] **E. N. Lorenz.** Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, pp.130-141, 1963.
- [32] **C. Letellier, P. Dutertre, G. Gouesbet.** Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, to be published in *Physical Review E*, 49 (4), April 1994.
- [33] **P. Melvin, N. B. Tuffillaro.** Templates and Framed Braids, *Physical Review A*, 44 (6), pp. 3419-3422, 1991.
- [34] **G. P. King, I. Stewart.** Phase Space Reconstruction for Symmetric Dynamical Systems, *Physica D*, 58, pp.216-228, 1992.
- [35] **R. Shaw.** Strange Attractor, Chaotic Behavior and Information Flow, *Z. Naturforsch*, 36 (a), pp. 80-112, 1981.
- [36] **P. Coulet, C. Tresser.** Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *Journal de Physique*, Colloque C5, supplément au n°8 (39), pp. C5-25, 1978.
- [37] **M. J. Feigenbaum.** Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformation, *Journal of Statistical Physics*, 19 (1), pp. 25-52, 1978.

Chapitre 5

Reconstruction du champ de vecteurs

5.1 Introduction

Les techniques de reconstruction couramment utilisées sont la méthode des *décalages temporels*, la méthode des *dérivées* et la méthode de la *décomposition en valeurs principales*. A partir de séries expérimentales, les méthodes de reconstruction peuvent fournir une grande différence dans la qualité des coordonnées résultantes et il n'est pas aisé de déterminer laquelle est la meilleure.

Nous commencerons par présenter une revue de ces trois techniques. Celle-ci s'appuiera largement sur l'excellent article de J. F. Gibson, J. D. Farmer, M. Casdagli et S. Eubank [1] qui montre l'équivalence de ces trois méthodes à une similitude près. Toutes ces méthodes s'appuieront sur la construction de variables indépendantes à partir de la seule série scalaire temporelle connue du physicien : ces nouvelles variables sont obtenues par décalages temporels, par estimation des dérivées de la série ou par une analyse en composantes principales. Chacune de ces méthodes permet une étude de la structure géométrique des attracteurs étranges et de déterminer des paramètres globaux importants tels que les dimensions fractales [2], les exposants de Lyapunov [3] ou les nombres de rotations [4].

Notre ambition est d'obtenir une approximation du champ de vecteurs régissant le système dynamique étudié à partir de la seule série expérimentale. La connaissance d'un champ de vecteurs équivalent permet de générer de nouvelles séries temporelles s'inscrivant sur un attracteur équivalent à l'original. Cette possibilité ouvre une large perspective dans le domaine de la prédiction à partir de la connaissance d'orbites périodiques.

Le formalisme de notre technique de reconstruction sera développé. La méthode sera appliquée à quelques systèmes déjà étudiés dans les chapitres précédents. Enfin la reconstruction d'un attracteur étrange à partir de la connaissance d'une seule orbite de période 1 sera testée.

5.2 Les différents systèmes de coordonnées

5.2.1 Les décalages temporels

La méthode des décalages temporels [5] est la plus populaire car sa mise en œuvre est relativement élémentaire. L'idée de base des méthodes de reconstruction d'un espace des phases est que le passé et le futur d'une série temporelle contiennent de l'information sur les variables d'état inobservées qui peut être utilisée pour définir l'état à l'instant présent.

Connaissant une série temporelle $\{x(i\delta t)\}_{i=0}^{N-1}$ échantillonnée avec un pas de temps δt constant, l'information sur le passé et le futur de la série peut être reportée dans le *vecteur délai* de la forme

$$\mathbf{x}(t) = (x(t + m_f\tau), x(t + (m_f - 1)\tau), \dots, x(t), \dots, x(t - m_p\tau))^\dagger \quad (5.1)$$

où τ est un décalage temporel multiple du temps d'échantillonnage ($\tau = h\delta t$), m_f est le nombre de coordonnées futures et m_p le nombre de coordonnées passées. Ici \dagger désigne la transposée et nous adoptons la convention de représenter les états par un vecteur colonne. La dimension du vecteur délai est $m = m_p + m_f + 1$.

Soit d la dimension du système dynamique qui génère $x(t)$. F. Takens [6] prouve qu'en l'absence de bruit, si $m \geq 2d + 1$, alors, génériquement, le vecteur délai forme un plongement de l'espace des phases original. Bien que $m \geq 2d + 1$ garantisse un plongement, nous avons vu au chapitre précédent qu'il existe des cas où il y a un plongement pour $m = d$ (à partir de la variable $y(t)$ du système de Rössler).

Du point de vue de l'idéalisation de mesures arbitrairement précises de $x(t)$, un plongement existe quel que soit τ : le choix du décalage temporel τ est sans influence sur la reconstruction. Cependant les données réelles sont nécessairement bruitées et une quantité finie de données introduit des erreurs d'estimation. Ces limitations rendent le choix de τ important.

Illustrons les différences de qualité observées sur la reconstruction de l'espace des phases en fonction du décalage. Supposons que seule la variable $y(t)$ du système de Lorenz soit connue du physicien. La série temporelle est représentée figure 5.1. Sa pseudo-période fondamentale T_0 est de $0.73s$.

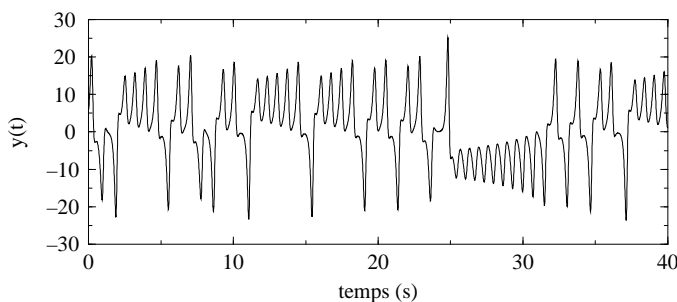


FIG. 5.1 – Série temporelle $y(t)$ du système de Lorenz.

De cette série, nous construisons une projection du portrait de phase sur un plan. Nous utilisons le vecteur délai $\mathbf{x}(t) = (y(t), y(t + \tau))^{\dagger}$. Suivant Th. Buzug *et al* [7], la projection est réalisée pour trois valeurs du décalage temporel : $\tau = 0.03s$, $\tau = 0.09s$ et $\tau = 0.80s$ (fig. 5.2).

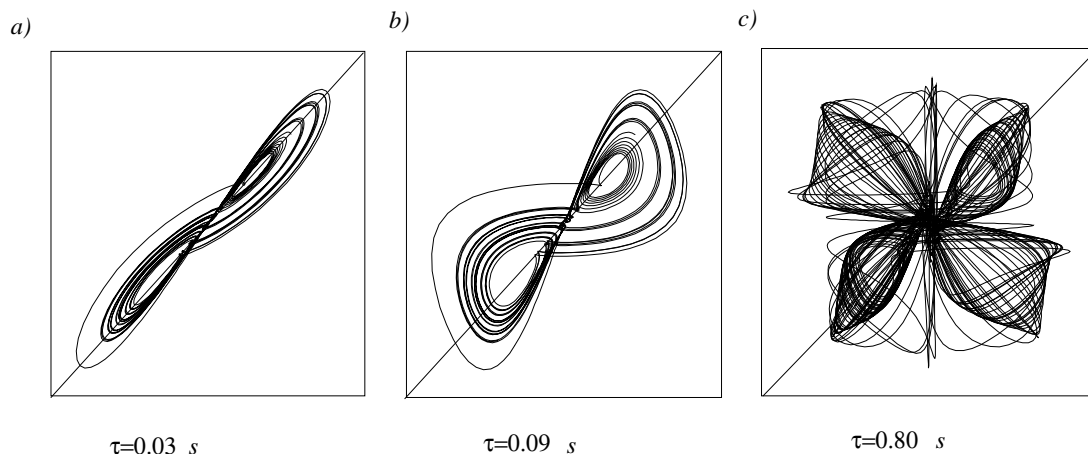


FIG. 5.2 – Projection de l'attracteur de Lorenz dans l'espace reconstruit défini par les coordonnées $(y(t + \tau), y(t))$ pour trois valeurs du décalage temporel τ . a) le décalage $\tau = 0.03s$ est trop petit : la dynamique est confinée au voisinage de la diagonale de l'espace. b) Le décalage $\tau = 0.09s$ est correctement choisi : la dynamique est relativement représentative de celle de l'attracteur original. c) Le décalage temporel $\tau = 0.80s$ est trop grand : les structures caractéristiques de l'attracteur original tendent à disparaître suite à des plissements intempestifs de l'attracteur.

Pour un décalage très faible, $\tau = 0.03s$, chaque coordonnée est à peu près identique à l'autre et la dynamique de l'espace des états est compressée sur la diagonale de l'espace reconstruit. Les coordonnées du vecteur délai ont tendance à être linéairement dépendantes (ce qui n'est pas le cas des observables réelles d'un système non-linéaire) : c'est la redondance. En raison de la résolution finie des données, un tel décalage peut aussi provoquer

des intersections de la trajectoire qui sembleront violer le principe du déterminisme. Dans le cas d'un décalage temporel trop important, $\tau = 0.80s$ supérieur à la pseudo-période T_0 du système, la dynamique à un instant donné devient complètement déconnectée de la dynamique à un instant ultérieur rendant les objets géométriques les plus simples extrêmement complexes : c'est la décorrélation. L'espace de plongement est correctement utilisé mais nous observons un plissement intempestif de l'attracteur.

Généralement le décalage temporel τ est choisi sur l'intervalle $[0, T_0/2]$ [8]. De manière à éviter la décorrélation complète des coordonnées du vecteur délai, le décalage τ est choisi aussi petit que possible, mais pas trop. Dans le cas typique d'applications expérimentales, la dimension d est inconnue. Ainsi m et τ doivent être choisis indépendamment du théorème de Takens.

De la série $\{x(i\delta t)\}_{i=0}^{N'-1}$, nous pouvons construire $N' = (N - (m_p + m_f)h)$ vecteurs de la série temporelle. Le premier vecteur est $\mathbf{x}(t_0)$ où $t_0 = m_p\tau$ et le dernier $x(t_0 + (N' - 1)\delta t)$. La matrice délai $X \in R^{N' \times m}$ est une séquence normalisée de tous les vecteurs délai,

$$X = \frac{1}{\sqrt{N'}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\dagger(t_0) \\ \mathbf{x}^\dagger(t_0 + \delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^\dagger(t_0 + (N' - 1)\delta t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

En substituant dans l'équation (5.1) le temps t_0 par sa valeur $m_p\tau$, nous observons que la matrice délai X est invariante sous le changement de m_p et m_f si $m = m_p + m_f + 1$ et τ est gardée constant :

$$X = \frac{1}{\sqrt{N'}} \begin{bmatrix} x(0) & , \dots , & x(h(m-1)\delta t) \\ x(\delta t) & , \dots , & x((h(m-1)+1)\delta t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x(((N'-1)\delta t) & , \dots , & x((N-1)\delta t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Ainsi la distinction entre le passé et le futur de $x(t)$ est sans signification.

La construction d'une matrice délai est le premier pas de toute méthode de reconstruction de l'espace des états. Nous montrerons que des méthodes telles que celle des dérivées ou de l'analyse en composantes principales correspondent à des transformations de coordonnées sur le vecteur délai.

Par convention, nous appellerons la construction de la matrice délai (essentiellement le choix des paramètres m et τ) la *reconstruction par décalage* et les opérations ultérieures la *transformation de coordonnées*.

5.2.2 L'analyse en composantes principales

L'analyse en composantes principales (qui diffère peu de la *Singular Value Decomposition*) est un algorithme général de décomposition multidimensionnelle des données en coordonnées linéairement indépendantes. D. S. Broomhead et G. P. King [9] proposent l'utilisation de l'analyse en composantes principales comme transformation de coordonnées sur la méthode de reconstruction pour éliminer les coordonnées linéairement dépendantes et les symétries artificielles.

La première étape de l'analyse en composantes principales est l'estimation d'une matrice de covariance (ceci peut aussi être formulé en terme d'une décomposition en valeurs singulières de la matrice X suivant [9]). Pour les vecteurs délai, nous définissons la matrice $\Theta_x \in R^{m \times m}$ par :

$$\Theta_x = X^\dagger X \quad (5.4)$$

Des définitions de la matrice délai X et de la matrice de covariance Θ , nous obtenons les éléments

$$(\Theta_x)_{ij} = \langle x_i(t)x_j(t) \rangle_t \quad (5.5)$$

où $x_i(t)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur délai $\mathbf{x}(t)$, $\langle \rangle_t$ la moyenne temporelle,

$$\langle f(t) \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{N'}} \sum_{i=0}^{N'-1} f(t_0 + i\delta t)$$

et t le temps de t_0 à $t_0 + (N' - 1)\delta t$. Par la suite nous supprimerons l'indice temporel dans la moyenne et nous supposerons que $N'\delta t$ est suffisamment grand pour que l'équation (5.4) définisse effectivement une moyenne temporelle infinie. En ce cas, Θ_x approche la matrice de covariance du vecteur délai. Dans cette limite les éléments de Θ_x sont donnés par la fonction d'autocorrélation :

$$(\Theta_x)_{ij} = A((i - j)\tau) \quad (5.6)$$

où

$$A(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x(t - \tau) dt \quad (5.7)$$

Tout au long de cette section, nous utiliserons Θ pour désigner la matrice de covariance et un indice pour préciser son système de coordonnées.

L'étape suivante de l'analyse en composantes principales est la diagonalisation de la matrice de covariance. Puisque Θ_x est symétrique et réelle, elle peut être écrite comme le produit

$$\Theta_x = S\Sigma^2 S^\dagger, \quad (5.8)$$

où S est une matrice orthonormale $m \times m$ et Σ^2 une matrice diagonale $m \times m$. $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ définit une rotation sur les vecteurs délai,

$$\mathbf{y}^\dagger(t) = \mathbf{x}^\dagger(t)S \quad (5.9)$$

Les composantes $y_j(t)$ du vecteur $\mathbf{y}(t)$ sont appelées *composantes principales*. Définissons les matrices $Y = X^\dagger S$ et $\Theta_y = Y^\dagger Y$. Il est aisément montré que Θ_y est la matrice de covariance des composantes principales

$$(\Theta_y)_{ij} = \langle y_i y_j \rangle \quad (5.10)$$

Par définition de Y et de Θ_x , et d'après l'équation (5.8) et l'orthonormalité de S , nous obtenons

$$\begin{aligned} \Theta_y &= S^\dagger \Theta_x^\dagger S \\ &= \Sigma^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ainsi la matrice de covariance Θ_y des composantes principales est diagonale. Les composantes principales sont donc linéairement indépendantes.

Soit \mathbf{s}_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de S et soit $\sigma_j^2 = \Sigma_j^2$. Alors \mathbf{s}_j est un vecteur propre de Θ_x et σ_j^2 est la valeur propre correspondante. D'après l'équation (5.9), les composantes principales sont des projections des vecteurs délai sur les vecteurs propres :

$$y_j(t) = \mathbf{x}^\dagger(t) \cdot \mathbf{s}_j \quad (5.12)$$

A partir des équations (5.10) et (5.11), les valeurs propres σ_j^2 mesurent la variance des composantes principales

$$\langle y_j^2 \rangle = \sigma_j^2 \quad (5.13)$$

L'ensemble de m valeurs propres $\{\sigma_j^2\}$, $j \in [0, m - 1]$, est appelé *spectre de valeurs singulières*. Les valeurs propres sont ordonnées comme

$$\sigma_0^2 \geq \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots$$

Le spectre de valeurs singulières est obtenu en représentant σ_j en fonction de j : il contient l'information sur l'expansion de la trajectoire dans l'espace de plongement. On peut penser la trajectoire décrite par la matrice X comme explorant un ellipsoïde de dimension m . Les vecteurs $\{\mathbf{s}_j\}$ définissent la direction des axes principaux de l'ellipsoïde et les éléments $\{\sigma_j\}$ leur longueur.

T. Sauer, J. Yorke et M. Casdagli [11] étendent le théorème de Takens aux composantes principales, montrant que génériquement $2d + 1$ composantes principales forment un plongement. Dans certains cas, moins de composantes principales sont nécessaires. Soit q le nombre minima de composantes principales qui forment un plongement, seule transformation qui nous intéresse, nous supposerons que $m > q$.

5.2.3 Les dérivées

Une reconstruction de l'espace des états peut aussi être obtenue à partir des dérivées. L'estimation de celles-ci peut être réalisée soit à partir d'un schéma aux différences finies, soit par des filtres linéaires. Nous présenterons ces deux techniques et montrerons qu'un filtre linéaire construit sur une base de polynômes de Legendre peut se ramener aux différences finies sous certaines conditions.

Nous posons les restrictions suivantes sur la fonction temporelle $x(t)$:

- $x(t)$ est analytique sur $t \in \mathbb{R}$
- $x(t)$ est bornée et ses dérivées sont bornées sur $t \in \mathbb{R}$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \neq 0$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \dot{x}^2(t) dt \neq 0$

où $\dot{x}(t)$ est la dérivée par rapport au temps de la série temporelle $x(t)$. Un exemple de fonction qui satisfait toutes ces restrictions est $x(t) = \sin t$. Toutefois, nous porterons notre attention sur des fonctions différentiables issues de la projection sur des valeurs réelles des trajectoires inscrites sur un attracteur chaotique généré par un système dynamique différentiable.

Schéma aux différences finies

Nous utiliserons l'information sur les variables inobservées contenue dans le passé et le futur d'une série temporelle par l'intermédiaire des dérivées. La transformation de coordonnées utilise alors de manière indirecte les paramètres m et τ .

Connaissant une série temporelle $\{x(i\delta t)\}_{i=0}^{N-1}$ échantillonnée avec un pas de temps δt constant, l'information sur le passé et sur le futur de la série peut être reportée dans un *vecteur dérivée* de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \left(x^{(0)}(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t) \right)^\dagger \quad (5.14)$$

où $x^{(i)}(t)$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de la série $x(t)$. La dimension du vecteur dérivée est m .

La fonction $x(t)$ étant supposée analytique et suffisamment différentiable, nous pouvons obtenir une approximation de la fonction $x(t)$ à l'instant $t + \tau$ (où $\tau = h\delta t$) à l'aide d'un développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 :

$$x(t + \tau) = x(t) + \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (5.15)$$

De même à l'instant $t - \tau$:

$$x(t - \tau) = x(t) - \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (5.16)$$

A l'aide d'une simple combinaison linéaire, nous obtenons une expression de la dérivée première $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t + \tau) - x(t - \tau)}{2\tau} + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (5.17)$$

Sur le même principe les dérivées d'ordre supérieur peuvent être obtenues. Ainsi les dérivées $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ sont données par les expressions suivantes :

$$\ddot{x}(t) = \frac{x(t + 2\tau) - 2x(t) + x(t - 2\tau)}{4\tau^2} + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (5.18)$$

$$\dddot{x}(t) = \frac{x(t + 3\tau) - 3x(t + \tau) + 3x(t - \tau) - x(t - 3\tau)}{8\tau^3} + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (5.19)$$

Le décalage temporel τ introduit dans la méthode des décalages se retrouve ici sous la forme d'une durée sur laquelle est développée la série de Taylor.

Utiliser un développement à un ordre supérieur améliore l'estimation des dérivées mais ne fournit pas de meilleure reconstruction ; dans certains cas un schéma d'ordre supérieur peut fournir des reconstructions de moins bonne qualité [10]. La distinction essentielle entre la méthode des décalages et celle des dérivées réside dans leur comportement respectif face au bruit. L'utilisation d'un vecteur délai répand le bruit de manière isotrope alors que l'utilisation d'un vecteur dérivée voit le bruit s'amplifier au fur et à mesure des dérivations successives. De plus, le bruit sur les différentes dérivées est corrélé. Nous verrons au chapitre 6 qu'une méthode des dérivées est extrêmement sensible au bruit.

Nous allons développer maintenant une technique d'estimation des dérivées par l'utilisation d'un filtre linéaire sur une base de polynômes de Legendre [1].

Polynômes discrets de Legendre

Dans cette section, nous allons montrer comment relier les vecteurs délai et les vecteurs dérivée. Pour cela, nous devons utiliser des vecteurs délai symétriques. En effet, dans les expressions des dérivées successives de la série temporelle $x(t)$ (eq. 5.17, 5.18 et 5.19), il apparaît au sein du schéma aux différences finies un vecteur délai sous une forme symétrique, c'est à dire

$$\mathbf{x}(t) = (x(t - p\tau), \dots, x(t), \dots, x(t + p\tau))^\dagger \quad (5.20)$$

où nous avons posé $m_p = m_f = p$ (ce qui est autorisé par l'invariance du vecteur délai entre le passé et le futur). Pour simplifier, le paramètre de dimension m sera donc choisi impair, soit de la forme $m = 2p + 1$. Nous pouvons alors décrire l'échelle temporelle du vecteur délai par la *taille de la fenêtre* $\tau_w = (m - 1)\tau$ au lieu du décalage temporel τ .

Nous nous intéressons maintenant à l'estimation de la dérivée à l'ordre j de la série $x(t)$ par un filtre linéaire discret du type :

$$w_j(t) = \sum_{n=-p}^p r_{j,p}(n) x(t + n\tau) \quad (5.21)$$

où la série temporelle $x(t)$ est la série à dériver, $w_j(t)$ est sa $j^{\text{ème}}$ dérivée et $r_{j,p}(n)$ est une convolution discrète paramétrisée par le choix de p et de l'ordre j de la dérivée désirée. Puisque $x(t)$ est analytique, nous pouvons la développer en série de Taylor tant que la taille de la fenêtre τ_w est suffisamment petite. Nous obtenons :

$$w_j(t) = \sum_{n=-p}^p r_{j,p}(n) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n\tau)^i}{i!} x^{(i)}(t) \right] \quad (5.22)$$

En supposant que l'ordre des sommations peut être permuté, nous obtenons [1] :

$$w_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau)^i}{i!} x^{(i)}(t) \left[\sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) \right] \quad (5.23)$$

D'après l'équation (5.23), nous pouvons rendre $w_j(t)$ proportionnelle à la $j^{\text{ème}}$ dérivée en imposant l'annulation du terme entre crochets pour $i < j$. Ceci est réalisé en choisissant $r_{j,p}(n)$ orthogonal à n^i , c'est à dire :

$$\sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) = 0 \quad \text{pour } i < j \quad (5.24)$$

Un noyau r qui satisfait cette contrainte laisse le terme en $i = j$ de l'équation (5.23) comme terme d'ordre principal en τ_w , ainsi $w_j(t)$ est approximativement proportionnel à $x^{(j)}(t)$.

Beaucoup de filtres satisfont l'équation (5.24). Nous porterons notre attention sur les filtres orthonormés tels que

$$\sum_{n=-p}^p r_{i,p}(n) r_{j,p}(n) = \delta_{ij} \quad \text{pour } i, j \leq 2p \quad (5.25)$$

Il peut être montré [1] que les contraintes d'orthogonalité des équations (5.24) et (5.25) déterminent un unique ensemble de m fonctions de base qui peuvent être générées à partir de la relation de récurrence suivante :

$$r_{j,p}(n) = \frac{1}{c_j p^j} \left[n^j - \sum_{k=0}^{j-1} r_{k,p}(n) \sum_{l=-p}^p l^j r_{k,p}(l) \right] \quad \text{pour } j \leq 2p \quad (5.26)$$

où c_j est une constante de normalisation. Ainsi $r_{j,p}(n)$ est un polynôme du $j^{\text{ème}}$ degré pair ou impair en n pour j pair ou impair. La constante de normalisation peut être déterminée par la condition suivante :

$$\sum_{n=-p}^p r_{j,p}^2(n) = 1 \quad (5.27)$$

qui fait de c_j une fonction de p . Reportant les équations (5.24) et (5.27) en substituant $p\tau$ par $\frac{\tau_w}{2}$, nous obtenons :

$$w_j(t) = \frac{c_j(p)\tau_w^j}{2^j j!} x^{(j)}(t) + \mathcal{O}(\tau_w^{j+1}) \quad (5.28)$$

La variable $w_j(t)$ est proportionnelle à la $j^{\text{ème}}$ dérivée $x^{(j)}(t)$ avec une constante de proportionnalité déterminée par j , p et τ . Les trois premiers polynômes discrets de Legendre ainsi définis pour $m \in [-p, p]$, c'est à dire les trois premiers $r_j \in \mathbb{R}^{m=2p+1}$, sont

$$\begin{cases} r_{0,p}(n) = \frac{1}{c_0(p)} \\ r_{1,p}(n) = \frac{1}{p c_1(p)} n \\ r_{2,p}(n) = \frac{1}{p^2 c_2(p)} \left(n^2 - \frac{p(p+1)}{3} \right) \end{cases} \quad (5.29)$$

où les constantes de normalisation sont :

$$\begin{cases} c_0(p) = \sqrt{2p+1} \\ c_1(p) = \sqrt{\frac{(2p+1)(p+1)}{3p}} \\ c_2(p) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4p^2-1)(p+1)(2p+3)}{5p^3}} \end{cases} \quad (5.30)$$

Les polynômes $r_{j,p}(n)$ peuvent se réduire à un filtre de différences finies quand p est pris sur de faibles valeurs [1]. Nous considérons maintenant $r'_{j,p}(n)$ avec p aussi petit que possible. De l'équation (5.26), $r_{j,p}(n)$ existe seulement pour $2p \geq j$. Ainsi pour $j = 0, 2, 4$ les p minimum sont respectivement $p = 0, 1, 2$. Sous la forme d'un vecteur, les polynômes discrets de Legendre pour ces paires (j, p) sont :

$$\begin{cases} r'_{0,0}(n) = (1)^\dagger \\ r'_{2,1}(n) = (1, -2, 1)^\dagger \\ r'_{4,2}(n) = (1, -4, 6, -4, 1)^\dagger \end{cases} \quad (5.31)$$

D'après les équations (5.21) et (5.23), nous avons l'égalité

$$\sum_{n=-p}^p r_{j,p}(n) x(t+n\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau)^i}{i!} x^{(i)}(t) \left[\sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) \right] \quad (5.32)$$

Cherchons par exemple la dérivée du deuxième ordre $\ddot{x}(t)$ associée au couple ($j = 2, p = 1$), nous obtenons :

$$\sum_{n=-1}^1 r'_{2,1}(n) x(t + n\tau) = \frac{\tau^2}{2} x^{(2)}(t) [r'_{2,1}(-1) + r'_{2,1}(+1)] \quad (5.33)$$

Nous obtenons alors

$$\ddot{x}(t) = \frac{x(t + \tau) - 2x(t) + x(t - \tau)}{\tau^2} + \mathcal{O}(\delta\tau^3) \quad (5.34)$$

qui est équivalente à la relation donnée par le schéma aux différences finies (5.18). Les dérivées d'ordre 0, 2 et 4 peuvent ainsi être obtenues. Les dérivées d'ordre impair 1,3,... peuvent être obtenues lorsque la dimension m est choisie paire [1]. Ainsi nous pouvons penser les différences finies comme un cas spécial des polynômes discrets de Legendre.

Nous avons vu que le filtre $w_j(t)$ est proportionnel aux dérivées. Aussi les éléments $w_j(t)$ peuvent former une base orthonormale dans $\mathbb{R}^{m=2p+1}$ avec les vecteurs de base \mathbf{r}_j définis par :

$$\mathbf{r}_j = (r_{j,p}(-p), \dots, r_{j,p}(0), \dots, r_{j,p}(p))^\dagger \quad (5.35)$$

et donc former un plongement de l'espace des phases original. D'après l'équation (5.21) la projection d'un vecteur délai sur la base de vecteurs \mathbf{r}_j est

$$w_j(t) = \mathbf{x}^\dagger(t) \mathbf{r}_j \quad (5.36)$$

Nous appelons $w_j(t)$ une *coordonnée de Legendre* puisque c'est la projection d'un vecteur délai sur un polynôme discret de Legendre. Nous insistons sur le fait qu'une coordonnée de Legendre $w_j(t)$ est une quantité dépendante de l'état fonction du temps, proportionnelle à la $j^{\text{ème}}$ dérivée de la série temporelle. Ceci n'est pas le cas du polynôme discret de Legendre \mathbf{r}_j , qui est un vecteur de base fixé dans un système de coordonnées orthogonal sur \mathbb{R}^m . Les coordonnées de Legendre et les polynômes discrets de Legendre sont reliés par l'équation (5.36).

Pris ensembles, les m polynômes discrets de Legendre définissent une transformation $\mathbf{R} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, donnée par la matrice $m \times m$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m-1}) \quad (5.37)$$

Par conséquent \mathbf{R} est orthonormée. Définissant le vecteur des coordonnées de Legendre par

$$\mathbf{w}_j(t) = \begin{bmatrix} w_0(t) \\ w_1(t) \\ \vdots \\ w_{m-1}(t) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Nous obtenons alors

$$\mathbf{w}^\dagger(t) = \mathbf{x}^\dagger(t) \mathbf{R} \quad (5.39)$$

Puisque \mathbf{R} est orthogonale, les coordonnées de Legendre sont une simple rotation des coordonnées délai. Lorsque τ_w est petit, les coordonnées de Legendre sont proportionnelles aux dérivées ; par conséquent **la relation entre les délais et les dérivées consiste en une rotation et un changement d'échelle.**

Cependant il n'est pas dit que les coordonnées de Legendre sont équivalentes aux dérivées obtenues par un schéma aux différences finies.

- Premièrement la réduction des polynômes discrets de Legendre aux différences finies prend place à différentes valeurs de p pour chaque \mathbf{r}_j . Par conséquent, les schémas standards de différences finies ((1), (-1, 1), (1, -2, 1), ...) correspondent à des \mathbf{r}_j de dimensions différentes. Plongées comme vecteurs dans \mathbb{R}^m , les différences finies ne sont pas orthonormées. Par exemple, les trois premiers schémas aux différences finies plongés comme vecteurs dans \mathbb{R}^3 sont (0,1,0), (0,-1,1) et (1,-2,1). De ce fait, si nous utilisons des schémas aux différences finies pour former un espace des états des dérivées, le bruit dans l'espace des états n'est pas isotrope, et le bruit reporté sur les différentes dérivées est corrélé.

- Deuxièmement, les coordonnées de Legendre sont proportionnelles aux dérivées et non égales. Ceci n'est pas une différence triviale puisque pour une série bruitée, le rapport signal/bruit des coordonnées de Legendre est déterminé par le préfacteur de l'équation (5.28). Généralement les rapports signal/bruit des coordonnées de Legendre sont meilleurs que ceux des schémas aux différences finies [1].

Lorsque τ_w est petit, les coordonnées de Legendre rendent possible une estimation quantitative grossière de la forme d'un attracteur dans l'espace des délais, et en particulier comment la forme de l'attracteur varie avec τ_w . Des relations (5.31) et (5.36), nous pouvons écrire \mathbf{r}_0 sous la forme :

$$\mathbf{r}_0 = \frac{(1, 1, \dots)}{\sqrt{m}} \quad (5.40)$$

qui correspond à la ligne identité. D'après les équations (5.30), (5.31) et (5.29), la projection du vecteur délai \mathbf{x} sur cette ligne est :

$$w_0 = \mathcal{O}(\tau_w^0) \quad (5.41)$$

Les directions orthogonales à la ligne identité correspondent à \mathbf{r}_j avec des valeurs supérieures de j ; dans ces directions la projection est

$$w_j = \mathcal{O}(\tau_w^j) \quad (5.42)$$

Ceci explique ce qui a été vu au début de ce chapitre : pour de faibles valeurs de τ_w (c'est à dire du décalage), l'attracteur est étiré le long de la ligne identité et écrasé suivant les directions perpendiculaires. De plus cela montre que pour de faibles τ_w l'attracteur reconstruit s'inscrit dans un ellipsoïde long et fin. Les longueurs des axes principaux sont de l'ordre de $\langle w_0^2 \rangle = \mathcal{O}(\tau_w^0)$ à $\langle w_{m-1}^2 \rangle = \mathcal{O}(\tau_w^{2m-2})$. Leurs orientations sont données par les polynômes discrets de Legendre.

5.3 Les reconstructions globales

Après une revue des différents systèmes de coordonnées, nous allons maintenant développer le formalisme de notre technique de reconstruction d'un champ de vecteurs à partir d'une série scalaire temporelle. Par opposition aux méthodes de reconstructions basées sur la prédiction du futur à partir de la connaissance du passé et dites *locales*, les reconstructions d'un champ de vecteurs sont dites *globales*. Ainsi, au lieu d'approximer la dynamique localement, les techniques globales réalisent une approximation du champ de vecteurs original sur l'ensemble de l'espace des phases. De ce fait elles permettent la reconstruction de l'ensemble de l'attracteur à partir de la connaissance d'une faible région de celui-ci (voir section 5.5). Seules les composantes principales et les dérivées permettent une reconstruction globale. Après avoir décrit brièvement un exemple de reconstruction globale utilisant les composantes principales, nous présenterons notre méthode de reconstruction sur les dérivées.

5.3.1 A partir des composantes principales

K. Agarwal *et al* [12] utilisent le système de coordonnées constitué de d vecteurs propres ($d < m$) de l'espace orthogonal déterminé par la décomposition en composantes principales. La matrice X est alors projetée sur la base $\{\mathbf{s}_j\}$: ils obtiennent alors une nouvelle base définie par la matrice $\xi = XS$ constituée des éléments

$$\xi_j(t_i) = \sum_{k=1}^m x(t_i + (k-1)\tau) s_{kj} \quad i \in [1, N'] ; j \in [1, d] \quad (5.43)$$

Le système est alors décrit par le jeu d'équations différentielles ordinaires non-linéaires couplées :

$$\frac{d\xi_j}{dt} = G_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \quad (5.44)$$

où les fonctions non-linéaires G_j peuvent être exprimées comme la somme de fonctions de base telle que

$$G_j = \sum_k a_k^{(j)} \phi_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \quad (5.45)$$

Les fonctions de base sont alors déterminées par approximation des dérivées des d variables par une méthode de minimisation du χ^2 , soit :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N'} \left[\xi_j(t_i) - G_j(a_i^j, a_i^j, \dots, a_i^j) \right]^2 \quad (5.46)$$

où les coefficients $a_k^{(j)}$ sont les inconnues à déterminer. Les fonctions G_j déterminent un champ de vecteurs reconstruit. Cette technique est éprouvée lorsque la divergence du flot dans l'espace des états reconstruits est constante (hypothèse vérifiée lorsque le système dynamique a une dissipation constante). Toutefois, la robustesse de la méthode n'a pas été testée pour des fonctions G_j constituées de termes non-linéaires de degré supérieur à 3 ($\xi_1^l \xi_2^m \xi_3^n$ où $l + m + n \leq 3$). Cette méthode utilise une prescription *ad hoc* (divergence constante) de manière à réduire le nombre de coefficients $a_k^{(j)}$ permis.

5.3.2 A partir des dérivées

F. Takens [6] a aussi suggéré que des plongements pouvaient être réalisés en termes de dérivées successives de la série temporelle pour lesquels le système dynamique peut être réécrit sous la forme standard [18] (ou canonique [19]) suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{2d} = y_{2d+1} \\ \dot{y}_{2d+1} = F_s(y_1, y_2, \dots, y_{2d}, y_{2d+1}) \end{cases} \quad (5.47)$$

où F_s est la *fonction standard* du système [18]. L'espace reconstruit est alors défini par l'ensemble de coordonnées $(y_1(t), \dot{y}_1(t), \ddot{y}_1(t), \dots)$.

Partant de la série scalaire temporelle nous devons approximer la fonction standard F_s . Ceci implique une évaluation par une approximation à l'aide d'une méthode de moindres carrés. Pour résoudre ce problème, nous devons commencer par choisir un modèle pour la fonction standard F_s . Initialement, une décomposition sur des fonctions rationnelles polynômiales fut retenue et permit une reconstruction des systèmes de Rössler [18] et de Lorenz [20] à partir de leurs variables $x(t)$ respectives. Les fonctions rationnelles présentent l'avantage de modéliser des fonctions standard F_s pourvues de pôles (ce qui est effectivement le cas des systèmes de Rössler et de Lorenz). Cependant elles présentent des pôles qui rendent délicate leur intégration (bien que les ensembles singuliers soient de mesure de Lebesgue nulle). De plus, l'approximation de la fonction standard F_s sur des fonctions rationnelles se comporte très mal en présence de bruit [21]. Précisons en outre qu'aucun critère de convergence n'est connu dans ce cas.

Par conséquent l'implémentation d'une nouvelle méthode d'approximation de la fonction standard, plus robuste, s'est avérée nécessaire. Une approximation L_2 sur des polynômes multivariés est maintenant utilisée [22]. Non seulement, il existe un théorème de convergence pour les approximations polynômiales du à Weierstrass [23], mais encore la méthode ne présente plus les problèmes d'intégration numérique en raison de l'absence de pôles. Les polynômes ne sont pas choisis a priori égaux à des polynômes de Legendre comme dans le travail de J. Cremers et A. Hübler [24] ou de J. F. Gibson *et al* [1], mais sont gémérés par l'attracteur lui-même.

Bien que seules les techniques de plongements différentiels soient ici étudiées, remarquons que la technique d'approximation utilisée peut aussi être appliquée pour modéliser les fonctions propres du spectre de valeurs singulières (de manière analogue à celle employée par A. K. Agarwal *et al* [12]).

F. Takens [6] a prouvé un ensemble de théorèmes justifiant de telles reconstructions (ou plongements) à partir d'un simple degré de liberté du mouvement dans l'espace des phases d'un système expérimental. Le portrait de phase reconstruit est relié à l'original par un changement différentiable de coordonnées. Ainsi l'information topologique peut être préservée malgré des variations quantitatives des coordonnées.

Le système standard

Nous reprenons dans la suite de ce chapitre les hypothèses du chapitre précédent. Soit le système dynamique continu défini par un système d'équations différentielles ordinaires (section 4.4) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mu) \quad (5.48)$$

où $\mathbf{x}(t) \in R^d$ est une fonction vectorielle dépendant du temps t et \mathbf{f} est le champ de vecteurs à d composantes générant le flot ϕ_t . $\mu \in R^p$ est le vecteur des paramètres à p composantes qui sera supposé constant dans cette section. Le système (5.48) est le *système original*. Les cas étudiés dans le cadre de cet ouvrage sont tels que $d = 3$. La dimension m de l'espace reconstruit est choisie égale à la dimension d de l'espace original. Les systèmes originaux peuvent par conséquent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) \end{cases} \quad (5.49)$$

Nous nous intéressons au cas où le système original produit un comportement asymptotique qui s'installe sur un attracteur A_O .

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il est possible de définir un système standard à partir d'une variable donnée du système original. Lorsque seule la série temporelle $\{x_i\}_{i=1}^N$ est connue, le nombre des équations (et des dérivées) à introduire au sein du système standard doit être estimé par un calcul de dimension de Hausdorff [2] de la série temporelle. Soit D_H la dimension de Hausdorff estimée, F. Takens [6] a prouvé que l'attracteur reconstruit (ou standard) est génériquement difféomorphiquement équivalent au système original lorsque la dimension m de l'espace de reconstruction vérifie le critère $m \geq 2D_H + 1$.

Toutefois, nous avons vu dans la première partie de cet ouvrage, que seule l'équivalence topologique nous importait réellement. Nous avons également montré que dans certains cas l'équivalence topologique était assurée pour des dimensions de reconstruction m telle que $m = \text{Int}(D_H) + 1$ où $\text{Int}(D_H)$ est la partie entière de la dimension de Hausdorff D_H estimée à partir de la série scalaire temporelle. Ainsi, en acceptant de limiter la généralité de notre étude, nous pouvons restreindre, avec certaines précautions, la dimension de l'espace standard à celle de l'espace original. Dans la suite de ce chapitre, la dimension de l'espace des phases standard sera donc toujours égale à 3 comme celle du portrait de phase original.

Supposons que l'observable soit x , le système standard s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = F_s(X, Y, Z) \end{cases} \quad (5.50)$$

Il génère l'attracteur standard A_S défini sur le système de coordonnées standard (X, Y, Z) , c'est à dire sur les dérivées successives de l'observable ($X = x, Y = \dot{x}, Z = \ddot{x}$). Lorsque le système original est connu, il est possible de définir une transformation standard Φ reliant les coordonnées standard (X, Y, Z) aux coordonnées originales (x, y, z) . Elle s'écrit (relation (4.16)) :

$$\Phi \equiv \begin{cases} X = x \\ Y = f_1(x, y, z) \\ Z = \frac{\partial f_1}{\partial X} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial Y} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial Z} f_3 \end{cases} \quad (5.51)$$

L'application de Φ à l'attracteur A_O permet l'obtention de l'attracteur standard A_S associé au système standard. En principe, la transformation inverse Φ^{-1} peut alors être obtenue. Toutefois, il se peut que les manipulations

algébriques impliquées rendent difficile voire impossible la détermination de Φ^{-1} . Lorsque Φ^{-1} est connue, l'expression analytique de la fonction standard $F_S(X, Y, Z)$ peut alors être déterminée. Evidemment, lorsque le système original est inconnu, la transformation standard Φ , son inverse Φ^{-1} et la transformation standard F_S ne peuvent être déterminées.

Toutefois, que le système original soit connu ou pas, le but à atteindre est une reconstruction du système standard à partir d'une seule des variables du système original. Pour cela, il est supposé que le physicien enregistre numériquement (ou expérimentalement) la série scalaire temporelle échantillonnée $\{x_i\}_{i=1}^N$ où l'entier i représente le temps discret tel que $t = i\delta t$. Les dérivées successives de l'observable $x(t)$ peuvent être estimées par un schéma aux différences finies. Toute l'information sur le champ de vecteurs original \mathbf{f} est reportée au sein de la fonction standard F_S . Reconstruire un champ de vecteurs équivalent à \mathbf{f} nécessite donc une estimation \tilde{F}_S de la fonction F_S .

Cette estimation est réalisée par une décomposition de Fourier sur une base de polynômes multivariés à l'aide d'une méthode de moindres carrés. Une telle technique de reconstruction est dite globale car la fonction standard estimée \tilde{F}_S à partir de la connaissance des dérivées de l'observable x , permet de reconstruire l'ensemble de l'espace des états dans lequel est défini l'attracteur standard A_S .

La procédure de reconstruction se décompose en différentes étapes qui sont :

- Simultanément à la lecture de la série temporelle $\{x_i\}_{i=1}^N$, une série vectorielle temporelle $\{X_i = x_i, Y_i = \dot{x}_i, Z_i = \ddot{x}_i, \dot{Z}_i = \ddot{\dot{x}}_i\}_{i=1}^{N_q}$ est obtenue à l'aide d'un schéma aux différences finies centré d'ordre 2 (voir section 5.2.3). A chaque point de l'ensemble de coordonnées standard $\{X_i, Y_i, Z_i\}_{i=1}^{N_q}$ est ajoutée une valeur $\{\dot{Z}_i\}$. En effet le système standard (5.50) nécessite la connaissance de cette variable pour l'approximation de la fonction standard F_S .
- Une estimation numérique de la décomposition de Fourier de la fonction standard F_S est réalisée sur une base de polynômes multivariés par une technique de moindres carrés. Un spectre naturel est alors calculé à partir des coefficients de Fourier. Nous possédons à ce stade une approximation de la fonction standard.
- L'attracteur standard A_S peut enfin être obtenu par intégration du système standard reconstruit.

L'espace fonctionnel sur lequel est décomposé la fonction standard F_S va maintenant être développé.

5.3.3 Approximation de la fonction standard

Choix d'un espace fonctionnel E^n

Afin d'établir une décomposition robuste de la fonction standard F_S , nous choisissons de la projeter sur un espace de Hilbert E^n de polynômes P . Ces polynômes seront construits à partir des trois variables X , Y et Z . Ils seront construits selon l'arrangement des triplets (i, j, k) correspondants aux puissances respectives des variables X , Y et Z suivant l'ordre donné par (pour plus de détails, voir [22] et [27]).

$$\left\{ \begin{array}{l} 000 \\ 100 \ 010 \ 001 \\ 200 \ 110 \ 101 \ 020 \ 011 \ 002 \\ 300 \ 210 \ 201 \ 120 \ 111 \ 102 \ 030 \ 021 \ 012 \ 003 \\ \dots \end{array} \right. \quad (5.52)$$

Nous pouvons étiqueter chaque triplet suivant le même ordre :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & & & & & & & & & & \\ 2 & 3 & 4 & & & & & & & & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & & & & & \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & \\ \dots & & & & & & & & & & \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Il y a ainsi une correspondance bijective entre les étiquettes n et les triplets (i, j, k) . Nous utiliserons donc la notation suivante :

$$P^n = X^i Y^j Z^k \quad (5.54)$$

L'espace vectoriel E^n sera constitué par les combinaisons linéaires des polynômes P^i tels que $i \leq n$. Ces polynômes sont linéairement indépendants et forment donc la base $\{P^i\}_{i \leq n}$. Nous construisons maintenant une seconde base par orthonormalisation de la première.

Construction d'une base orthornormée

La base $\{\phi^k\}$ est construite par orthonormalisation de Gram-Schmidt suivant la relation :

$$\phi^k = \frac{\phi^{*k}}{\|\phi^{*k}\|} \quad (5.55)$$

où les éléments ϕ^{*k} sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{*1} = P^1 \\ \phi^{*k} = P^k - \sum_{\alpha=1}^{k-1} (P^k, \phi^\alpha) \phi^\alpha, \quad k > 1 \end{array} \right. \quad (5.56)$$

et où $(,)$ désigne le produit scalaire. La condition d'orthonormalisation s'écrit :

$$(\phi^i, \phi^j) = \delta_{ij} \quad (5.57)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les relations (5.55) et (5.56) impliquent que les ϕ^k définissent une famille multivariable triangulaire de polynômes donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^1 = A_1^1 \\ \phi^2 = A_1^2 + A_2^2 x \\ \phi^3 = A_1^3 + A_2^3 x + A_3^3 Y \\ \phi^4 = A_1^4 + A_2^4 x + A_3^4 Y + A_4^4 Z \\ \phi^5 = A_1^5 + A_2^5 x + A_3^5 Y + A_4^5 Z + A_5^5 x^2 \end{array} \right. \quad (5.58)$$

La projection d'un monôme P^k sur la base $\{\phi^j\}$ s'écrit :

$$P^k = \sum_{\alpha=1}^k B_\alpha^k \phi^\alpha \quad (5.59)$$

Le développement des coefficients B_α^k sont alors de la forme :

$$B_\alpha^k = (P^k, \phi^\alpha) \quad (5.60)$$

Inversement, chaque fonction ϕ^k peut se décomposer sur la base suivant la relation :

$$\phi^k = \sum_{\alpha=1}^k A_\alpha^k P^\alpha \quad (5.61)$$

Ainsi, les coefficients B_j^k s'écrivent aussi :

$$B_j^k = \sum_{\alpha=1}^j A_\alpha^j (P^k, P^\alpha) \quad (5.62)$$

En insérant les relations (5.60) et (5.61) dans la relation (5.56), nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^k A_\alpha^{*k} P^\alpha = P^k - \sum_{\beta=1}^{k-1} B_\beta^k \sum_{\alpha=1}^{\beta} A_\alpha^\beta P^\alpha \\ A_\alpha^{*k} = A_\alpha^k \|\phi^{*k}\| \end{cases} \quad (5.63)$$

Avec une permutation sur la double sommation :

$$\sum_{\beta=1}^{k-1} \sum_{\alpha=1}^{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} \sum_{\beta=\alpha}^{k-1} \quad (5.64)$$

nous obtenons

$$\sum_{\alpha=1}^k A_\alpha^{*k} P^\alpha = P^k - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \left(\sum_{\beta=\alpha}^{k-1} B_\beta^k A_\alpha^\beta \right) P^\alpha \quad (5.65)$$

Les coefficients A_α^{*k} sont alors déterminés par identification entre chaque membre de la relation (5.65). Nous obtenons la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} A_k^{*k} = 1 \\ A_\alpha^{*k} = - \sum_{\beta=\alpha}^{k-1} B_\beta^k A_\alpha^\beta \end{cases} \quad \text{pour } \alpha < k \quad (5.66)$$

De manière à ne conserver qu'une relation sur les A , nous remplaçons les coefficients B_β^k par leur expression suivant la relation (5.62); nous obtenons alors :

$$A_\alpha^{*k} = - \sum_{\beta=\alpha}^{k-1} A_\alpha^\beta \left[\sum_{\gamma=1}^{\beta} A_\gamma^\beta (P^k, P^\gamma) \right] \quad (5.67)$$

Il reste alors à normaliser chaque A_α^{*k} comme suit :

$$A_\alpha^k = \frac{A_\alpha^{*k}}{\left[\sum_{\beta=1}^k \sum_{\gamma=1}^k A_\beta^{*k} A_\gamma^{*k} (P^\beta, P^\gamma) \right]^{1/2}} \quad (5.68)$$

Approximation de Fourier

Nous possédons maintenant une base complète de n polynômes orthogonaux ϕ^k . Nous souhaitons une approximation \tilde{F}_s de la fonction standard connue sur l'ensemble des points :

$$F_s(X_i, Y_i, Z_i) = \dot{Z}_i \quad (5.69)$$

Une telle approximation est donnée par :

$$\tilde{F}_s = \sum_j c_j^* \phi^j \quad (5.70)$$

où les c_j^* représentent les coefficients de Fourier. L'approximation de Fourier ainsi définie est la meilleure approximation possible sur la base choisie.

Les coefficients de Fourier c_j^* sont donnés par :

$$c_j^* = (F_s, \phi^j) \quad (5.71)$$

Nous avons ainsi

$$c_j^* = \left(\dot{Z}_i, \sum_{k=1}^j A_k^j P^k \right) \quad (5.72)$$

L'approximation de la fonction dans E^n s'écrit aussi en fonction des P^j :

$$\tilde{F}_s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i c_i^* A_j^i P^j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n c_i^* A_j^i P^j \quad (5.73)$$

En posant

$$K_p = \sum_{i=p}^n c_i^* A_p^i \quad (5.74)$$

nous pouvons réécrire la relation (5.73) :

$$\tilde{F}_s = \sum_{p=1}^n K_p P^p \quad (5.75)$$

Ainsi l'information concernant l'attracteur chaotique (métrique plus dynamique) est contenue dans l'ensemble des coefficients K_p qui forme une signature de l'attracteur. L'ensemble $\{K_p\}$ est appelé *spectre naturel* de l'attracteur.

Résultats et vecteur pilote

Les spectres de coefficients reconstruits sont alors évalués. Plusieurs paramètres de reconstruction doivent être introduits. Dans la suite de ce chapitre, nous nous bornerons à présenter les meilleurs résultats obtenus sur quelques systèmes connus. L'influence de chacun des paramètres sur la qualité de la reconstruction sera étudiée au chapitre suivant.

Il a été observé que la qualité de la reconstruction dépendait du nombre de points N_q retenus au sein de la série scalaire temporelle associés à leurs dérivées successives, du nombre de points N_s par pseudo-période T_0 et du nombre N_p de polynômes retenus pour l'approximation de la fonction standard F_s . Chaque système ayant sa propre pseudo-période T_0 , le pas d'intégration δt de l'algorithme de Runge-Kutta à pas constant d'ordre 4 [28] doit être choisi en fonction de T_0 . La reconstruction se fait donc sous un *vecteur pilote* constitué de ces paramètres ; il est de la forme $(\delta t, N_q, N_s, N_p)$.

5.4 Applications

Nous avons développé le principe de notre technique de reconstruction. Elle va être maintenant appliquée aux deux systèmes les plus populaires de la dynamique des systèmes : celui de Rössler [25] et de Lorenz [26].

5.4.1 Le système de Rössler

Le système de Rössler (étudié aux chapitres 2 et 4) est constitué de l'ensemble des trois équations différentielles ordinaires couplées suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (5.76)$$

dont les paramètres de contrôle sont choisis égaux à $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$ et pour lesquels le mouvement asymptotique s'installe sur un attracteur étrange (fig. 5.3).

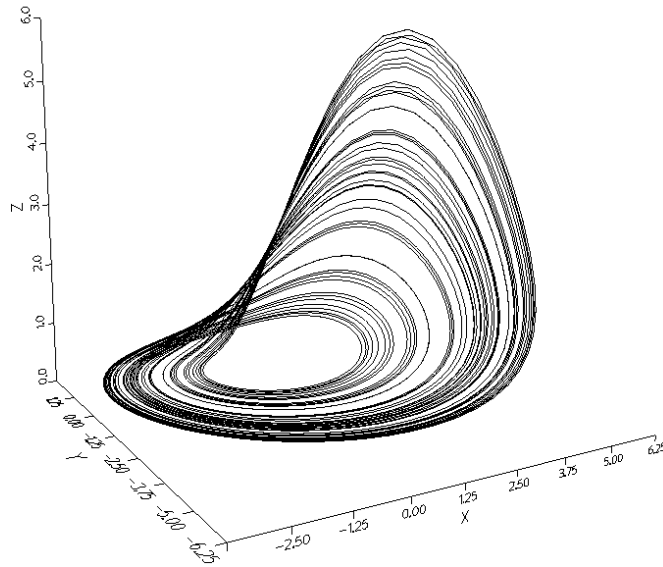


FIG. 5.3 – Attracteur A_O généré par le système original de Rössler.

Le système (5.76) représente le système original. Il est constitué de trois coordonnées originales : chaque coordonnée peut être considérée comme une observable, et par conséquent, trois cas différents peuvent être étudiés comme lors de l'étude de la transformation standard au chapitre précédent.

Observable $x(t)$

Suivant la procédure développée section 5.3.2, le système standard est de la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = F_{S_x}(x, Y, Z) \end{cases} \quad (5.77)$$

La transformation directe standard Φ_x est de la forme (section 4.4.1) :

$$\Phi_x \equiv \begin{cases} X = x \\ Y = -y - z \\ Z = -b - x - ay + z(c - x) \end{cases} \quad (5.78)$$

Cette transformation peut être inversée :

$$\Phi_x^{-1} \equiv \begin{cases} x = X \\ y = -\frac{Y(c - X) + Z + b + X}{a + c - X} \\ z = \frac{Z + b + X - aY}{a + c - X} \end{cases} \quad (5.79)$$

Dérivant l'expression de Z dans Φ_x et substituant les coordonnées originales par leur expression suivant Φ_x^{-1} , nous obtenons la fonction standard F_{S_x} suivante :

$$F_{S_x} = ab - cX + X^2 - aXY + XZ + (ac - 1)Y + (a - c)Z - \frac{Y(X + b - aY + Z)}{a + c - X} \quad (5.80)$$

Dans ce cas, la fonction standard F_{S_x} présente une singularité en $X_c = a + c$ de mesure de Lebesgue nulle. Le système standard n'est alors intégrable que par un algorithme de Runge-Kutta à pas variable [28]. De plus, en raison du terme rationnel de F_{S_x} , celle-ci ne peut avoir une décomposition exacte sur la base de polynômes choisie (cf. section 5.3.2). La fonction F_{S_x} ne s'identifie pas à son approximation de Fourier \tilde{F}_{S_x} .

Le système standard exact est représenté figure 5.4.a. Bien que la fonction standard F_{S_x} soit de la forme d'une fonction rationnelle, des reconstructions satisfaisantes sont facilement obtenues. Elles sont relativement robustes, c'est à dire qu'elles sont peu sensibles à des modifications du vecteur pilote. Par exemple, un système standard reconstruit satisfaisant (fig. 5.4.b) est obtenu avec le vecteur de pilotage égal à $(10^{-3}, 500, 5, 33)$, c'est à dire avec un système original échantillonné à 5 points par pseudo-période T_0 sur $100 T_0$ et une approximation de F_{S_x} sur 33 polynômes.

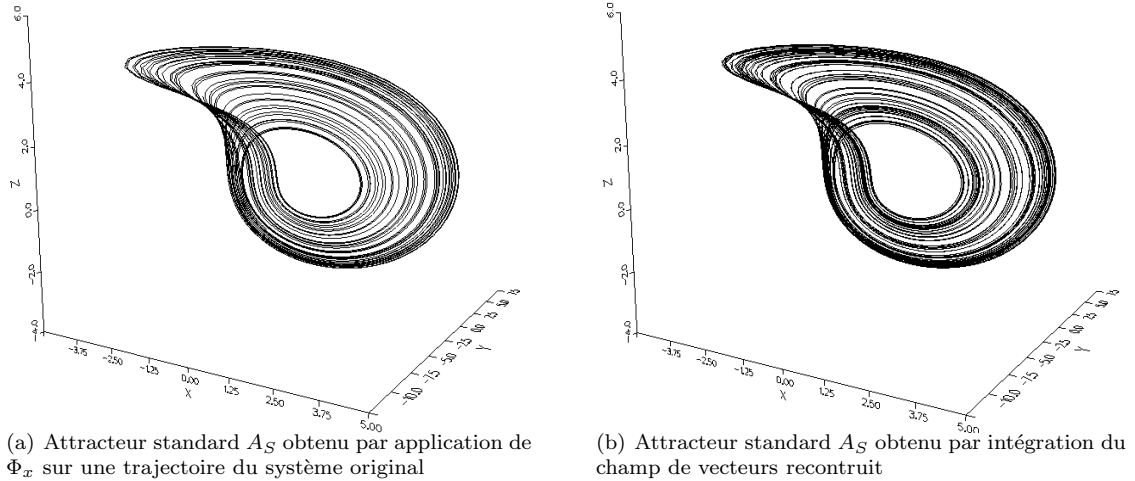
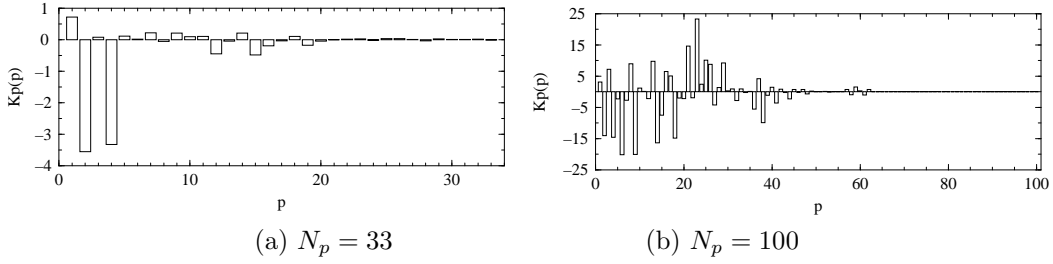


FIG. 5.4 – Attracteur standard reconstruit sous un vecteur pilote $(10^{-3}, 500, 5, 33)$.

Il est possible d'obtenir une reconstruction satisfaisante par un échantillonnage sur un nombre plus faible de pseudo-périodes si N_q et N_s sont augmentés de manière adéquate, c'est à dire par un sur-échantillonnage. Remarquons qu'une fonction rationnelle telle que F_{S_x} est correctement estimée par un polynôme de 33 termes (33 composantes dans le spectre de K_p représenté figure 5.5.a). Un spectre de K_p à 100 composantes est représenté figure 5.5.b. Il est évident que l'information essentielle est contenue pour $p < 50$. L'information contenue au voisinage de $p = 60$ est une information parasite car aucune tentative de reconstruction d'un système standard avec un vecteur pilote $(\delta t, N_q, N_s, 60)$ n'a pu aboutir. De plus, l'ajout de polynômes supplémentaires parasite également les K_p d'ordre inférieur.

FIG. 5.5 – Spectre de coefficients sous une reconstruction pilotée par le vecteur $(10^{-3}, 500, 5, N_p)$.**Observable $y(t)$**

L'observable est maintenant la variable $y(t)$. Utilisant une permutation circulaire, la procédure développée section 5.3.2 est appliquée à la variable $y(t)$. Le système standard est :

$$\begin{cases} \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = X \\ \dot{X} = F_{S_y}(X, Y, Z) \end{cases} \quad (5.81)$$

La transformation standard directe Φ_y est la suivante (section 4.4.1) :

$$\Phi_y \equiv \begin{cases} X = ax + (a^2 - 1)y - z \\ Y = y \\ Z = x + ay \end{cases} \quad (5.82)$$

tandis que son inverse Φ_y^{-1} est de la forme :

$$\Phi_y^{-1} \equiv \begin{cases} x = Z - aY \\ y = Y \\ z = aZ - X - Y \end{cases} \quad (5.83)$$

La fonction standard F_{S_y} est alors :

$$F_{S_y} = -b - cY + (ac - 1)Z + (a - c)X - aY^2 + (a^2 + 1)YZ - aXY - aZ^2 + XZ \quad (5.84)$$

C'est un cas très simple où la fonction standard F_{S_y} est une fonction polynomiale. Nous retrouvons sur cette variable tous les bénéfices de l'équivalence difféomorphique entre l'attracteur original A_O et l'attracteur reconstruit A_{S_y} démontrée au chapitre précédent. La fonction standard F_{S_y} étant une fonction polynomiale de E^9 , elle est égale à son approximation de Fourier \tilde{F}_{S_y} dans E^9 :

$$\tilde{F}_{S_y} = K_1 + K_2 Y + K_3 Z + K_4 X + K_5 Y^2 + K_6 YZ + K_7 YX + K_8 Z^2 + K_9 ZX \quad (5.85)$$

dont le spectre théorique de coefficients K_p peut être connu par identification avec l'expression de F_{S_y} . Les valeurs littérales K_p , les valeurs numériques théoriques K_{pth} et les valeurs calculées K_p sont reportées dans le tableau 5.1 pour une reconstruction pilotée par le vecteur $(10^{-3}, 100, 10, 10)$. Nous pouvons définir une erreur relative ϵ_p de la forme :

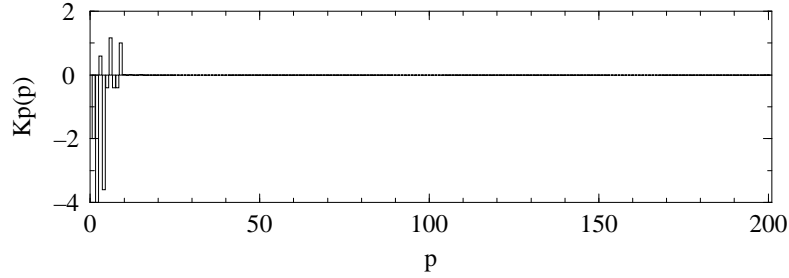
$$\epsilon_p = \frac{|K_{pth} - K_p|}{K_{pth}} \quad (5.86)$$

L'erreur relative est de l'ordre de 0.001 %. Nous avons ici une très bonne précision sur le calcul des K_p . L'avantage manifeste d'une telle propriété de la fonction standard est une grande robustesse. Une reconstruction satisfaisante du système standard (fig. 5.7.b) est obtenue avec un vecteur pilote égal à $(10^{-3}, 10, 10, 10)$.

TAB. 5.1 – Coefficients K_p

p	\mathcal{K}_p	$K_{p_{th}}$	K_p	ϵ_p (%)
1	$-b$	-2	-1.9999842	$0.8 \cdot 10^{-03}$
2	$-c$	-4	-3.9999729	$0.7 \cdot 10^{-03}$
3	$ac - 1$	0.592	0.5919901	$0.2 \cdot 10^{-02}$
4	$a - c$	-3.602	-3.6019751	$0.7 \cdot 10^{-03}$
5	$-a$	-0.398	-0.3979973	$0.7 \cdot 10^{-03}$
6	$a^2 + 1$	1.158404	1.1583972	$0.6 \cdot 10^{-03}$
7	$-a$	-0.398	-0.3979960	$1.0 \cdot 10^{-03}$
8	$-a$	-0.398	-0.3979978	$0.6 \cdot 10^{-03}$
9	1	1	0.9999936	$0.6 \cdot 10^{-03}$
10	0	0	$1.1426 \cdot 10^{-06}$	-

La robustesse se traduit par une reconstruction satisfaisante obtenue sous le vecteur $(10^{-3}, 200, 10, 200)$. Le spectre de coefficients correspondant est proposé figure 5.6 : seuls les 9 coefficients théoriquement non nuls restent différents de 0. Une reconstruction de qualité est donc obtenue sans aucune difficulté : la reconstruction est très robuste à partir de cette variable.

FIG. 5.6 – Spectre de coefficients sous le vecteur $(10^{-3}, 200, 10, 200)$.

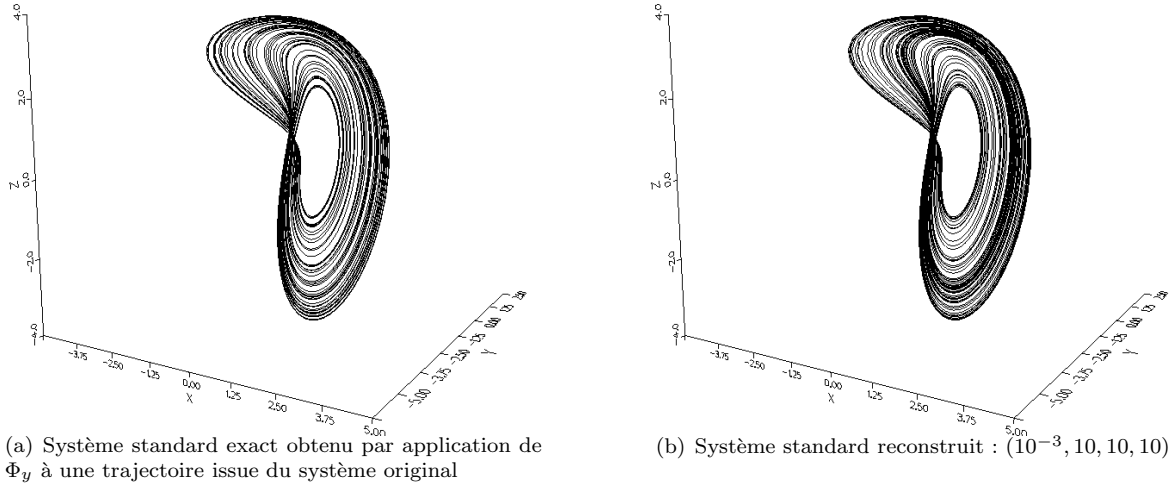
Observable $z(t)$

Poursuivant la permutation circulaire, seule l'observable $z(t)$ est accessible au physicien. Le système original est maintenant :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Z} = X \\ \dot{Y} = F_{S_z}(X, Y, Z) \end{cases} \quad (5.87)$$

La transformation standard Φ_z associée est de la forme (section 4.4.1) :

$$\Phi_z \equiv \begin{cases} X = b + z(x - c) \\ Y = -bc + bx + c^2z - 2cxz - yz - z^2 + x^2z \\ Z = z \end{cases} \quad (5.88)$$

FIG. 5.7 – Système standard issu de l'observable $y(t)$.

Son inverse Φ_z^{-1} s'écrit :

$$\Phi_z^{-1} \equiv \begin{cases} x = c + \frac{X-b}{Z} \\ y = -Z - \frac{Y}{Z} + \frac{X(X-b)}{Z^2} \\ z = Z \end{cases} \quad (5.89)$$

et la fonction standard F_{S_z} :

$$F_{S_z} = b - (X+c)Z - X + aY + aZ^2 + \frac{1}{Z} [(ab + 3Y)X - bY - aX^2] + \frac{2X^2}{Z^2}(b-X) \quad (5.90)$$

Cette fonction est encore une fonction rationnelle laissant apparaître une singularité pour $Z = 0$. L'attracteur A_{S_z} associé au système standard (fig. 5.8) est obtenu par application de la transformation Φ_z à une trajectoire issue de l'intégration du système original (5.76). Nous pouvons d'ores et déjà constater une forte compression des trajectoires au voisinage de l'origine de l'espace des phases standard. Cette compression se retrouve directement sur l'évolution temporelle de la variable $z(t)$ (voir section 4.4.1). Toutes les tentatives de reconstruction d'un attracteur chaotique ont été vaines. Seul un cycle limite a pu être reconstruit.

5.4.2 Le système de Lorenz

Le système de Lorenz [26] est rendu particulièrement intéressant par la présence d'une symétrie au sein de son portrait de phase (chapitre 3). Il possède deux variables équivariantes, $x(t)$ et $y(t)$, et une variable invariante $z(t)$. Comme l'ont précisé G. P. King et I. Stewart [29], le théorème de Takens ne s'applique pas aux systèmes équivariants, comme le système de Lorenz. D'autre part, nous avons vu à la section 4.4.2 que les attracteurs standards A_{S_x} et A_{S_y} possèdent des propriétés de symétrie différentes de celles du système original : la symétrie axiale originale est remplacée par une symétrie centrale. Il ne peut donc y avoir équivalence difféomorphe entre l'attracteur A_O et les attracteurs A_{S_x} et A_{S_y} . De plus, en raison de l'invariance de la variable $z(t)$, l'attracteur standard A_{S_z} ne possède aucune propriété de symétrie. Si topologiquement cela nous importe peu, du point de vue du diagramme de bifurcation, la symétrie éventuelle d'un attracteur interdit certaines bifurcations (par exemple celle du doublement de période [30]).

Afin de remédier à ces inconvénients, G. P. King et I. Stewart proposent le recours à deux variables : une équivariante et une invariante. Malgré tout cela, nous nous bornerons, à l'instar de beaucoup d'autres, à l'étude de la reconstruction d'un portrait de phase à partir d'une seule série scalaire temporelle.

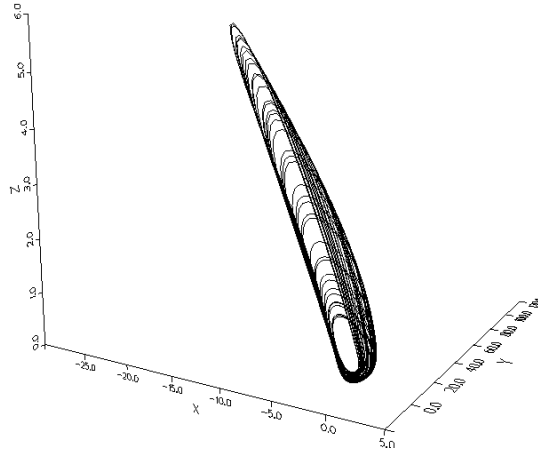


FIG. 5.8 – Système standard exact obtenu par application de Φ_y à une trajectoire issue du système original.

Le système original est constitué de l'ensemble de trois équations différentielles ordinaires suivant (étudié aux chapitres 3 et 4) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.91)$$

nanti des paramètres de contrôle $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ pour lesquels le mouvement asymptotique s'installe sur un attracteur étrange symétrique (fig. 5.9). Suivant la même stratégie que dans la section 4.4.2, nous étudierons les trois observables $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

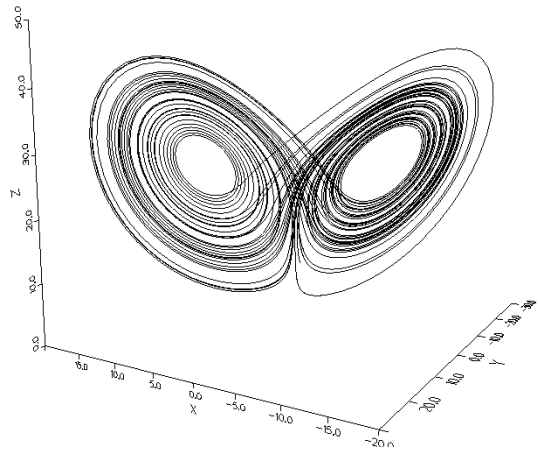


FIG. 5.9 – Attracteur original A_O généré par le système de Lorenz $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$.

Observable $x(t)$

L'évolution temporelle de l'observable $x(t)$ est supposée être la seule connaissance que possède le physicien sur le système. Il est en présence d'une variable équivariante. Le système standard associé s'écrit de la manière

suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = F_{S_x}(X, Y, Z) \end{cases} \quad (5.92)$$

La transformation standard Φ_x s'écrit :

$$\Phi_x \equiv \begin{cases} X = x \\ Y = \sigma(y - x) \\ Z = \sigma[(R + \sigma)x - (\sigma + 1)y - xz] \end{cases} \quad (5.93)$$

Son inverse Φ_x^{-1} s'écrit :

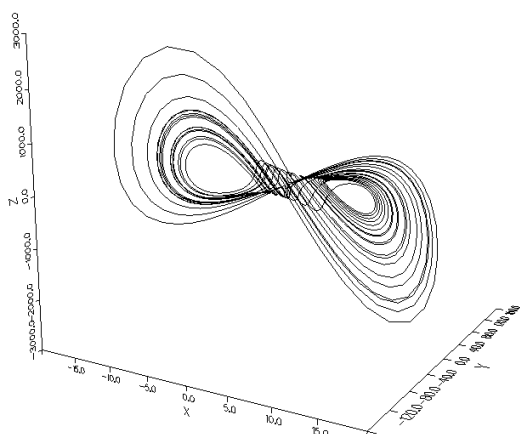
$$\Phi_x^{-1} \equiv \begin{cases} x = X \\ y = X + \frac{Y}{\sigma} \\ z = (R - 1) - \frac{1}{\sigma X} [(\sigma + 1)Y + Z] \end{cases} \quad (5.94)$$

tandis que la fonction standard F_{S_x} est de la forme :

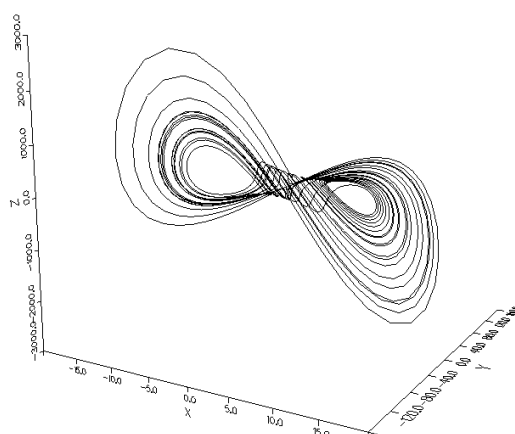
$$F_{S_x} = b\sigma(R - 1)X - b(\sigma + 1)Y - (b + \sigma + 1)Z - X^2Y - \sigma X^3 + \frac{Y[(\sigma + 1)Y + Z]}{X} \quad (5.95)$$

C'est un nouveau cas où la fonction F_{S_x} est rationnelle. L'existence d'une singularité en $X = 0$ interdit une décomposition exacte dans un espace de polynômes E^n .

L'intégration du système standard (5.92) génère un attracteur A_{S_x} représenté figure 5.10.a. Une reconstruction satisfaisante (fig. 5.10.b) est obtenue pour un vecteur pilote égal à $(10^{-3}, 10^4, 100, 18)$. Malheureusement une telle reconstruction est vraiment peu robuste. De très faibles variations du vecteur pilote suffisent à détruire la structure fractale.



(a) Attracteur A_{S_x} obtenu par application de Φ_x à une trajectoire générée par le système original



(b) Attracteur A_{S_x} obtenu par reconstruction du champ de vecteurs $(10^{-3}, 10^4, 100, 18)$

FIG. 5.10 – Attracteur A_{S_x} du système standard.

Observable $y(t)$

Suivant une permutation circulaire, le physicien n'est censé connaître maintenant que l'évolution temporelle de l'observable $y(t)$. C'est encore une variable équivariante. Le système standard est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = X \\ \dot{X} = F_{S_y}(X, Y, Z) \end{cases} \quad (5.96)$$

La transformation standard Φ_y est de la forme (section 4.4.2) :

$$\Phi_y \equiv \begin{cases} X = -R(\sigma + 1)x + (R\sigma + 1)y + (\sigma + b + 1)xz - \sigma yz - x^2y \\ Y = y \\ Z = Rx - y - xz \end{cases} \quad (5.97)$$

tandis que son inverse Φ_y^{-1} est plutôt difficile à obtenir. En posant

$$\begin{cases} A = 1 - R - Rb \\ B = (\sigma + b + 1)(Y + Z) + X - Y \\ C = -\sigma Y(Y + Z) \end{cases} \quad (5.98)$$

on obtient finalement (après un peu d'algèbre et la résolution d'une équation du troisième ordre en x) :

$$\Phi_y^{-1} \equiv \begin{cases} x = \bar{X} = (x_1 + x_2)^{1/3} + (x_1 - x_2)^{1/3} - \frac{A}{3Y} \\ y = Y \\ z = \bar{Z} = \frac{R\bar{X} - Y - Z}{\bar{X}} \end{cases} \quad (5.99)$$

où

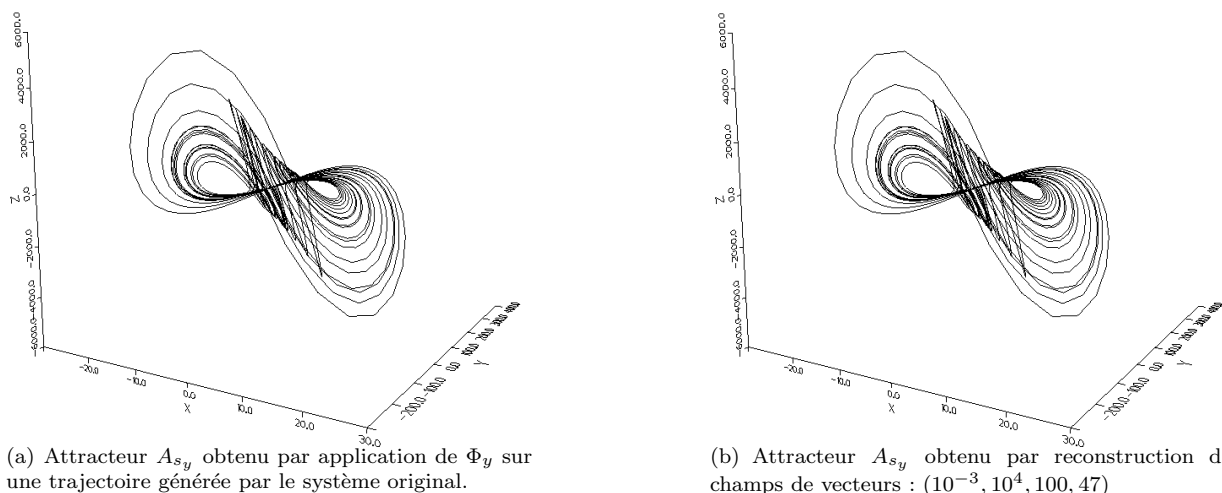
$$\begin{cases} x_1 = \frac{AB}{6Y^2} - \frac{C}{2Y} - \frac{A^3}{27Y^3} \\ x_2 = \frac{1}{6} [4B^3Y - B^2A^2 - 18ABCY + 27C^2Y^2 + 4A^3C]^{1/2} \frac{1}{3^{1/2}Y^2} \end{cases} \quad (5.100)$$

La fonction standard F_{S_y} peut alors être donnée :

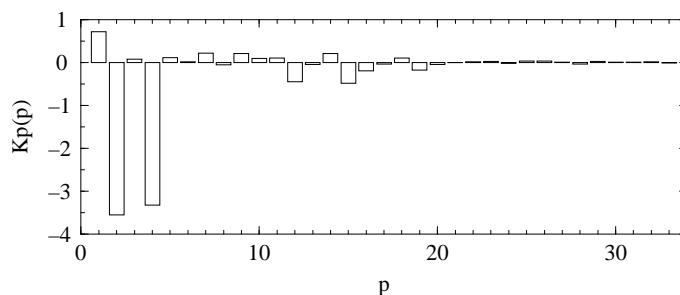
$$\begin{aligned} F_{S_y} = & R(1 + R\sigma + \sigma + \sigma^2)\bar{X} - (R\sigma(\sigma + 2) + 1)Y \\ & - [(1 + b + \sigma)^2 - b - \sigma + 2R\sigma] \bar{X}\bar{Z} + \sigma(\sigma + 2b + 2)Y\bar{Z} \\ & + (2 + b + 3\sigma)\bar{X}^2Y - 3\sigma\bar{X}Y^2 + \sigma X\bar{Z}^2 - R\bar{X}^3 + \bar{X}^3\bar{Z} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Nous allons tout de même tenter l'approximation de cette fonction F_{S_y} plutôt compliquée. Précisons qu'elle présente des singularités en $\bar{X} = 0$ et $Y = 0$.

Il n'a pas été tenté d'intégration du système standard (5.96). L'attracteur A_{S_y} (fig. 5.11.a) qui lui est associé est obtenu par application de la transformation Φ_y à une trajectoire issue de l'intégration du système original. L'attracteur A_{S_y} est très similaire à l'attracteur A_{S_x} : nous retrouvons la symétrie centrale (par rapport à l'origine de l'espace des phases standard). Les reconstructions sont peu robustes. La structure fractale est rapidement détruite sous une perturbation du vecteur pilote. Toutefois une reconstruction satisfaisante (fig. 5.11.b) est obtenue pour le vecteur pilote égal à $(10^{-3}, 10^4, 100, 47)$.

FIG. 5.11 – Attracteur standard A_{S_y} associé au système standard.

Il est tout de même remarquable que la fonction standard F_{S_y} , aussi compliquée soit elle, puisse être approximée par une fonction polynômiale \tilde{F}_{S_y} à 47 termes non-linéaires. Le spectre de coefficients K_p est présenté figure 5.12 : aucune information significative n'apparaît après le cinquantième coefficient.

FIG. 5.12 – Spectre de coefficients de la fonction \tilde{F}_{S_y} sur E^{75} : les coefficients sont représentés à la puissance 1/4 pour une meilleure lisibilité du spectre.

Observable $z(t)$

Le physicien a maintenant à sa disposition l'observable invariante $z(t)$. Le système standard est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Z} = X \\ \dot{Y} = F_{S_z}(X, Y, Z) \end{cases} \quad (5.102)$$

La transformation standard Φ_z s'écrit de la manière suivante :

$$\Phi_z \equiv \begin{cases} X = -bz + xy \\ Y = b^2z + Rx^2 + \sigma y^2 - (b + \sigma + 1)xy - x^2z \\ Z = z \end{cases} \quad (5.103)$$

Son inverse Φ_z^{-1} s'obtient après la résolution d'un polynôme en x d'ordre 4 qui se ramène à un polynôme du second degré. En posant :

$$D = b^2 Z - (b + \sigma + 1)(X + bZ) - Y \quad (5.104)$$

la transformation standard inverse Φ_z^{-1} s'écrit :

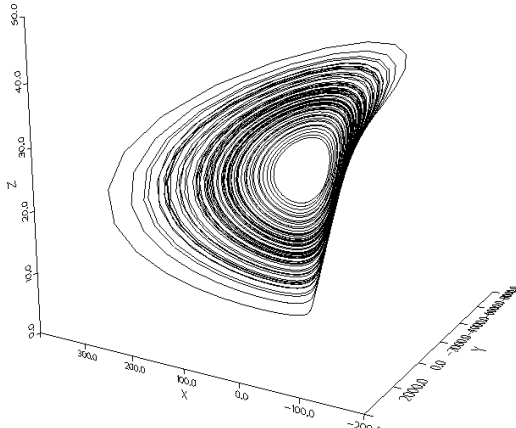
$$\Phi_z^{-1} \equiv \begin{cases} x = \epsilon \left[\frac{-D + [D^2 - 4(R - Z)\sigma(X + bZ)^2]^{1/2}}{2(R - Z)} \right]^{1/2} = \epsilon \bar{X} \\ y = \epsilon \frac{X + bZ}{\bar{X}} = \epsilon \bar{Y} \\ z = Z \end{cases} \quad (5.105)$$

où $\epsilon = \pm 1$. ϵ reste indéterminé. Il est une signature de l'équivariance du système de Lorenz : le système est invariant sous le changement de variable $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. La fonction standard est de la forme :

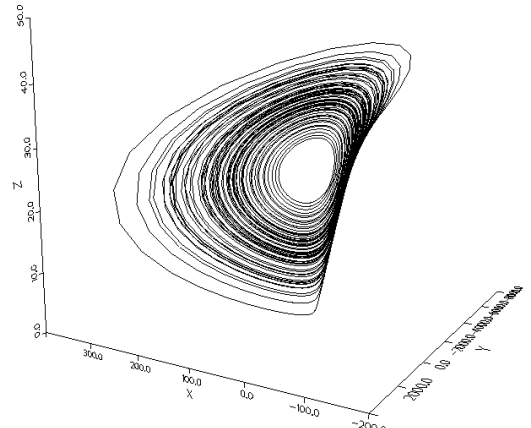
$$\begin{aligned} F_{S_z} = & -b^3 Z - (R + 3R\sigma - bR)\bar{X}^2 - (3\sigma + \sigma^2 + b\sigma)\bar{Y}^2 \\ & + [(1 + b + Z)^2 - b(\sigma + 1) + 4R\sigma] \bar{X}\bar{Y} \\ & + [1 + 3\sigma + 2b] \bar{X}^2 Z - 4\sigma \bar{X}\bar{Y} Z - \bar{X}^3 \bar{Y} \end{aligned} \quad (5.106)$$

Ici encore, la fonction standard F_{S_z} est plutôt compliquée et présente un ensemble de singularités, notamment pour $Z = R$.

Comme nous l'avons vu à la section 4.4.2, l'attracteur standard A_{S_z} (fig. 5.13.a) obtenu par application de la transformation Φ_z sur une trajectoire générée par le système original (5.91) est dépourvu de symétrie.



(a) Attracteur A_{S_z} obtenu par application de ϕ_z sur une trajectoire du système original



(b) Attracteur A_{S_z} obtenu par reconstruction du champ de vecteurs : $(10^{-3}, 10^4, 100, 46)$

FIG. 5.13 – Attracteur A_{S_z} associé au système standard.

Malgré la complexité de la fonction standard F_{S_z} , son approximation de Fourier par un polynôme à 46 coefficients permet l'obtention d'un attracteur standard A_{S_z} reconstruit sous le vecteur $(10^{-3}, 10^4, 100, 46)$. Cette reconstruction est plus robuste que dans les deux cas précédents. En accord avec G. Rowland et J. C. Sprott [14] qui observent une perte accrue de robustesse lorsque les systèmes sont symétriques, la robustesse de la reconstruction est bien meilleure sur la variable $z(t)$ qui fournit un portrait de phase reconstruit pourvu d'une structure plus simple (non symétrique) que les autres variables.

Nous avons testé la puissance de notre méthode dans plusieurs cas. Si les problèmes de robustesse se posent encore et font toujours l'objet de recherches, il est indéniable qu'un progrès a été réalisé par rapport à la

technique de décomposition de la fonction standard sur des fonctions rationnelles polynômiales ([18], [20] et [10]). Il nous reste pourtant à offrir une démonstration de la puissance d'une telle technique en réalisant une reconstruction à partir d'orbites périodiques.

5.5 Reconstruction à partir d'orbites périodiques

Si durant les années 80, la caractérisation des attracteurs étranges se faisait souvent par l'intermédiaire de calculs de dimension [2] ou de spectres d'exposants de Lyapunov [3], l'importance des orbites périodiques au sein d'un système chaotique a commencé à poindre à l'aube des années 90 [31]. En effet, si l'extraction des orbites périodiques est désormais un problème résolu [32], leur extraction d'un système expérimental semble devenir une réalité par les techniques de contrôle [33].

A cela s'ajoute l'essor de la caractérisation topologique [4] qui est basée sur la connaissance de quelques orbites de faible période. Nous avons vu aux chapitres 2 et 3, que deux ou trois orbites de faible période suffisaient à valider un patron. Une condition sur cette vérification demeure pourtant que chaque bande du patron soit visitée par au moins une orbite périodique. Néanmoins, nous démontrerons que la connaissance d'une seule orbite de période 1 (qui ne visite donc qu'une seule bande du patron) peut permettre la reconstruction globale de l'attracteur A_{S_y} .

5.5.1 Le ruban simplement plié

Nous commençons notre étude sur le système de Rössler (5.76) avec pour vecteur des paramètres de contrôle $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$. Etant donné le résultat de la section 5.4.1, nous choisissons de travailler sur la variable $y(t)$ qui présente la plus grande robustesse. Nous savons que le vecteur pilote $(10^{-3}, 10, 10, 10)$ permet une reconstruction satisfaisante. Nous rappelons que pour le vecteur (a, b, c) choisi, l'attracteur est un ruban simplement plié (cf. chapitre 2). Le patron qui lui est associé est représenté figure 5.14.

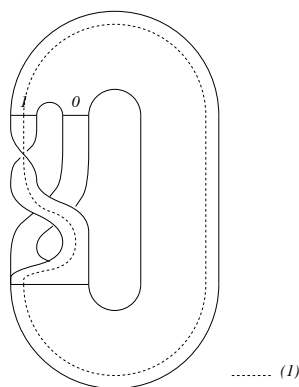


FIG. 5.14 – Patron du ruban simplement plié et l'orbite (1) qui lui est associée.

De la population d'orbites périodiques de l'attracteur, nous choisissons de tenter une reconstruction à partir de l'orbite de période 1 codée par la séquence symbolique (1). Cette orbite est construite sur le patron (fig. 5.14). Comme nous pouvons le constater, seule la bande 1 est visitée. A priori nous n'avons aucune information sur la bande 0...

Dans l'espace des phases original, l'orbite (1) est obtenue par intégration du système de Rössler (5.76) à partir des conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_0 = 0.2296610494032504 \\ y_0 = -4.11575770590046 \\ z_0 = 0.4500602426204998 \end{cases} \quad (5.107)$$

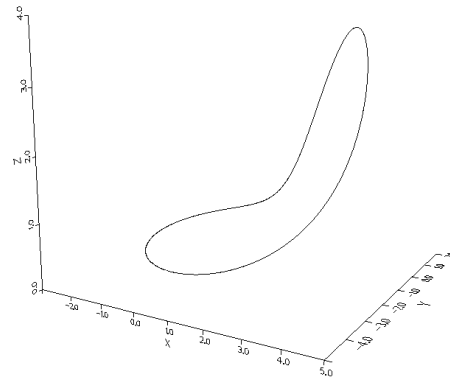


FIG. 5.15 – Orbite de période 1 codée par la séquence (1) du ruban simplement plié : $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$.

extraites du tableau 2.2. Elle est représentée figure 5.15. La reconstruction se réalise sous le vecteur pilote $(10^{-3}, 10, 10, 10)$, c'est à dire sur une pseudo-période. Elle conduit au spectre de coefficients K_p regroupés dans le tableau 5.2. Les valeurs des K_p calculées sont en très bon accord avec les valeurs théoriques. La fonction standard F_S est donc correctement estimée et l'attracteur A_S issu de l'intégration du système standard est équivalent à l'attracteur A_O ; comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'attracteur de Rössler ne présente plus de "trou" en son centre pour $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$. Ceci est une signature de la présence d'une dynamique symbolique complète (section 2.3). Cette propriété se retrouve bien sur l'attracteur reconstruit (fig. 5.16). Une révolution sur l'orbite suffit donc à reconstruire l'attracteur A_{S_y} dans son ensemble (fig. 5.16).

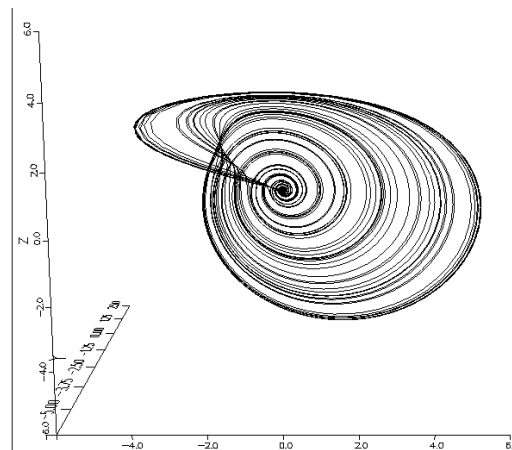


FIG. 5.16 – Attracteur A_{S_y} reconstruit à partir de l'orbite (1) sous le vecteur $(10^{-3}, 10, 10, 10)$.

Ainsi l'orbite (1) contient suffisamment d'information pour permettre une approximation de la fonction standard F_{S_y} et une reconstruction du champ de vecteurs, c'est à dire qu'elle contient de l'information sur l'ensemble du portrait de phase standard.

En d'autres termes, l'orbite de période 1 contient de l'information sur la bande 0 qu'elle ne visite pas puisqu'elle permet la reconstruction globale de l'attracteur ! Mais poursuivons notre étude par des variations des paramètres de contrôle.

TAB. 5.2 – Coefficients K_p

p	\mathcal{K}_p	$K_{p_{th}}$	K_p	ϵ_p (%)
1	$-b$	-2	-1.999921	$0.4 \cdot 10^{-2}$
2	$-c$	-4	-3.999950	$0.1 \cdot 10^{-2}$
3	$ac - 1$	0.7318	0.731773	$0.4 \cdot 10^{-2}$
4	$a - c$	-3.56705	-3.566983	$0.2 \cdot 10^{-2}$
5	$-a$	-0.43295	-0.432967	$0.4 \cdot 10^{-2}$
6	$a^2 + 1$	1.187445703	1.187429	$0.1 \cdot 10^{-2}$
7	$-a$	-0.43295	-0.432967	$0.4 \cdot 10^{-2}$
8	$-a$	-0.43295	-0.432944	$0.1 \cdot 10^{-2}$
9	1	1	0.999980	$0.2 \cdot 10^{-2}$
10	0	0	$-0.465 \cdot 10^{-5}$	-

5.5.2 L'entonnoir

Pour des paramètres égaux à $(a, b, c) = (0.523, 2, 4)$, nous avons vu au chapitre 2 que l'attracteur était caractérisé par un patron à 4 bandes (fig. 5.17).

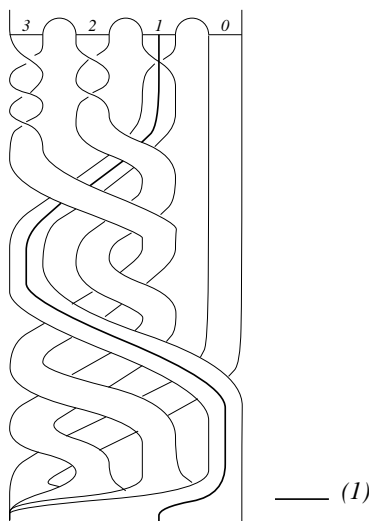


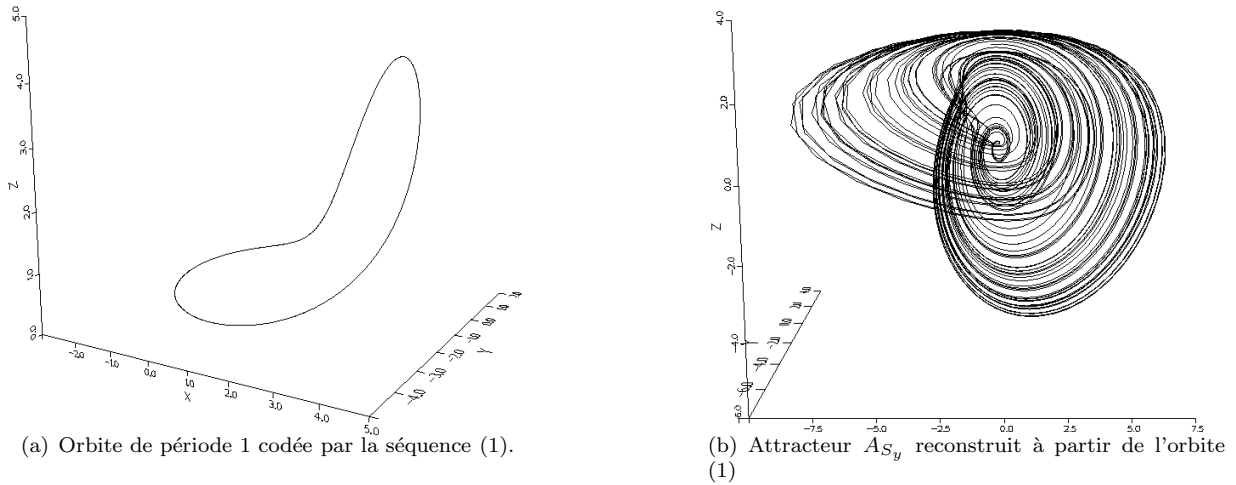
FIG. 5.17 – Patron à 4 bandes associé à l'attracteur généré par le système original pour $(a, b, c) = (0.523, 2, 4)$.

Fort de notre succès précédent, nous tentons maintenant une reconstruction de cet attracteur à partir de la même orbite périodique : (1). Ce sont ainsi trois bandes qui ne sont pas visitées par l'orbite périodique choisie. Le vecteur pilote est toujours égal à $(10^{-3}, 10, 10, 10)$. L'orbite (1) est obtenue par intégration du système de Rössler nanti des paramètres de contrôle $(a, b, c) = (0.523, 2, 4)$ à partir des conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_0 = 0.2812795457084942 \\ y_0 = -3.9379773231553 \\ z_0 = 0.4585986331588 \end{cases} \quad (5.108)$$

L'orbite périodique est représentée figure 5.18.a.

Du point de vue topologique aucune distinction n'est possible entre l'orbite pour $a = 0.523$ et l'orbite

FIG. 5.18 – Reconstruction du système de Rössler : $(a, b, c) = (0.523, 2, 4)$ à partir de l'orbite (1).

pour $a = 0.43295$. Toutefois la reconstruction est effectuée avec succès (fig. 5.18.b). Les coefficients K_p sont correctement calculés offrant une estimation satisfaisante de la fonction standard F_S sur E^{10} (tableau 5.3).

TAB. 5.3 – Coefficients K_p

p	\mathcal{K}_p	$K_{p_{th}}$	K_p	ϵ_p (%)
1	$-b$	-2	-2.000021	$0.10 \cdot 10^{-2}$
2	$-c$	-4	-3.999869	$0.32 \cdot 10^{-2}$
3	$ac - 1$	1.092	1.091931	$0.63 \cdot 10^{-2}$
4	$a - c$	-3.477	-3.476880	$0.34 \cdot 10^{-2}$
5	$-a$	-0.523	-0.523052	$0.99 \cdot 10^{-2}$
6	$a^2 + 1$	1.273529	1.273502	$0.21 \cdot 10^{-2}$
7	$-a$	-0.523	-0.523082	$0.15 \cdot 10^{-1}$
8	$-a$	-0.523	-0.522953	$0.88 \cdot 10^{-2}$
9	1	1	0.999953	$0.46 \cdot 10^{-2}$
10	0	0	$-0.132 \cdot 10^{-4}$	-

Ainsi, l'attracteur a encore été reconstruit dans son ensemble par une approximation du champ de vecteurs standard à partir d'une orbite de période 1 (comparez la figure 5.18.b avec la figure 2.19 représentant l'attracteur original pour ces valeurs des paramètres de contrôle). En d'autres termes, nous sommes capables de prédire la population d'orbites périodiques d'un attracteur à partir de la connaissance d'une seule de ses orbites périodiques !

5.5.3 Limite de l'équivalence topologique

Précisons que si nous ne présentons que deux exemples, l'entreprise a été couronnée de succès pour différents points de l'espace des paramètres appartenant à l'ensemble $(a, b, c) \in ([0.380; 0.556], 2, 4)$. Notre méthode nous permet donc une caractérisation des orbites périodiques plus fine que celle offerte par la topologie.

En effet, les deux orbites de période 1 codées par la séquence symbolique (1) sont, par définition de la dynamique symbolique, topologiquement équivalentes. Elles ont le même nombre de self-torsions donné par l'élément de matrice du patron $M(1, 1)$. Elles ont même nombre de liaisons $L(1, N)$ avec toute orbite périodique

N présente sur les deux attracteurs (pour $a = 0.43295$ et $a = 0.523$). Pourtant, nous avons vu qu'elles ne contiennent pas la même information. Nous devons donc être en mesure de mettre en évidence une quantité qui distingue ces deux orbites.

Nous avons vu au chapitre 2 que le système de Rössler possède deux points fixes F_+ et F_- de coordonnées :

$$\begin{cases} x_{\pm} = \frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2} \\ y_{\pm} = -\frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2a} \\ z_{\pm} = \frac{c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}}{2a} \end{cases} \quad (5.109)$$

L'évolution de l'attracteur en fonction des paramètres de contrôle est pilotée par l'évolution des positions relatives des deux points fixes F_+ et F_- . Au fur et à mesure que le paramètre a augmente, le point F_+ se rapproche de l'attracteur ; son influence se fait donc de plus en plus sentir. Il modifie notamment la configuration de la variété au point d'infléchir notablement la boucle de l'orbite (1) (cf. fig. 5.15 et fig. 5.18.a).

Par conséquent la quantité représentative de l'attracteur liée à l'orbite (1) doit être reliée aux deux points fixes F_+ et F_- . Au point fixe F_- est associée une variété instable bidimensionnelle sur laquelle une trajectoire se développe en spirale divergente [34]. La variété stable est unidimensionnelle. Le second point fixe F_+ présente une variété instable unidimensionnelle et une variété stable bidimensionnelle sur laquelle une trajectoire décrit une spirale convergente [34]. Par conséquent, nous pouvons associer un vortex à chacun des points fixes. Chacun d'eux est caractérisé par une vitesse angulaire w_+ et w_- .

En accord avec les travaux de L. P. Sil'nikov [35], les valeurs propres du jacobien $J_{x_{\pm}}$ en ces points fixes C_{\pm} sont respectivement de la forme (section 2.3.2) :

$$\begin{cases} \rho_- + iw_- \\ \rho_- - iw_- \\ -\lambda_- \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho_+ - iw_+ \\ \rho_+ + iw_+ \\ \lambda_+ \end{cases} \quad (5.110)$$

Les deux vitesses angulaires peuvent donc être déterminées par calcul des valeurs propres du jacobien (section 2.3.3). Pour $(a, b, c) = (0.43295, 2, 4)$, les solutions sont en F_- :

$$\begin{cases} 0.1481087 + i 0.975955 \\ 0.1481087 - i 0.975955 \\ -3.63360630 \end{cases} \quad (5.111)$$

et en F_+ :

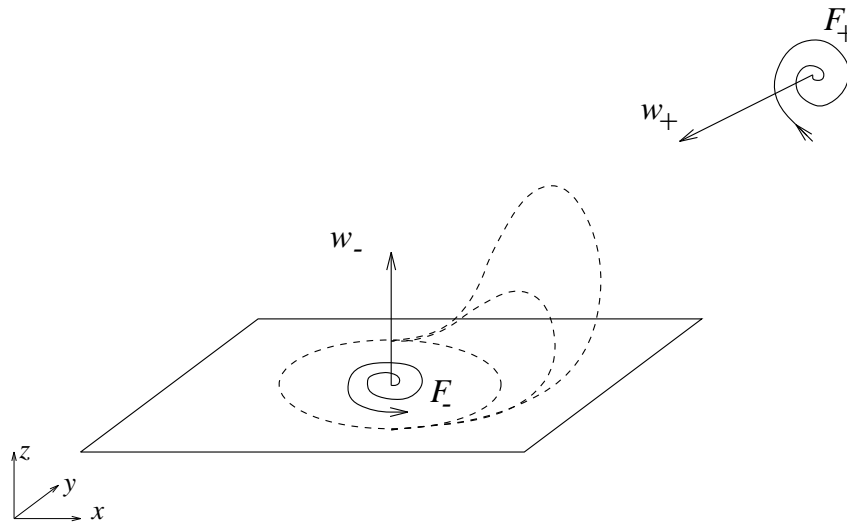
$$\begin{cases} -0.08145529 - i 3.108388 \\ -0.08145529 + i 3.108388 \\ 0.36619954 \end{cases} \quad (5.112)$$

D'où $w_- = 0.975955 \text{ rad s}^{-1}$ et $w_+ = 3.108388 \text{ rad s}^{-1}$. Nous pouvons ainsi retrouver un ordre de grandeur de la pseudo-période fondamentale T_0 par la relation :

$$T_0 \approx \frac{2\pi}{w_-} = 6.43 \text{ s} \quad (5.113)$$

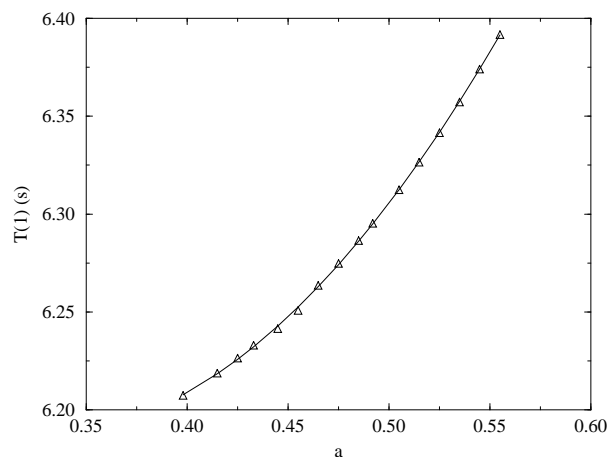
Etant donné que l'attracteur se construit sous l'influence de ses deux points fixes, l'orbite (1) est issue de la combinaison des deux vortex. Pour $a = 0.12496\dots$, $\rho_- \approx 0$ et $w_- \approx 1$: c'est la bifurcation de Hopf qui donne naissance au cycle limite générateur de la cascade de doublements de période (voir chapitre 1). Juste au delà, le cycle limite (1) est uniquement sous l'influence du vortex associé au point F_- : il décrit une ellipse contenue dans un plan approximativement parallèle au plan xy (fig. 5.19).

Au fur et à mesure que le paramètre de contrôle a est augmenté, le second point fixe F_+ se rapproche du point F_- . Le vortex qui lui est associé prend de l'influence sur le cycle limite (1) maintenant déstabilisé (à

FIG. 5.19 – Evolution de l'orbite (1) sous l'influence croissante du point fixe F_+ .

partir de $a = 0.3348\dots$). Le paramètre a augmentant, la distance entre les deux points fixes diminue et l'orbite (1) se décolle progressivement du plan originel pour s'orienter suivant la direction des z (fig. 5.19). Sa longueur augmente simultanément impliquant une croissance de la période temporelle $T(1)$.

D'une certaine manière, nous pouvons dire que la période temporelle T de l'orbite (1) est égale à la somme des contributions du vortex de F_- et du vortex de F_+ . L'évolution de la période temporelle (1) traduit qualitativement l'évolution respective de l'influence des vortex associés à F_- et F_+ . Par conséquent, cette période temporelle caractérise l'attracteur dont l'orbite (1) est issue. Son évolution en fonction du paramètre a est représentée figure 5.20.

FIG. 5.20 – L'évolution de la période temporelle T de l'orbite (1) comme signature d'un attracteur étrange. L'influence croissante du point fixe F_+ est caractérisée par une augmentation de la période T .

Nous avons donc mis en évidence une quantité liée à l'orbite (1) qui caractérise chaque attracteur. Ainsi l'information nécessaire à la reconstruction globale de l'espace des phases n'est pas d'ordre topologique. Deux orbites topologiquement identiques offrent deux attracteurs reconstruits différents. Cette information est contenue dans la structure différentielle de la trajectoire, c'est à dire dans les gradients de vitesse et d'accélération de

la trajectoire. Ainsi de telles possibilités sont probablement l'apanage des techniques différentielles. Une seule orbite de faible période suffit donc à caractériser un attracteur par l'information contenue dans sa structure différentielle.

5.6 Conclusion

Si les méthodes de reconstruction locale ont permis l'étude géométrique de l'espace des états par l'intermédiaire de paramètres tels que la dimension fractale, l'obtention de modèles d'équations non-linéaires pouvant reproduire le comportement chaotique observé est désormais une réalité numérique. L'approximation du champ de vecteurs peut être réalisée sur les dérivées ou les composantes principales. Nous avons préféré la méthode différentielle car si une telle reconstruction existe, l'attracteur standard présente toujours un "trou" en son milieu ; ceci garantit l'existence d'une section de Poincaré et la construction d'une application de premier retour. Les propriétés topologiques peuvent alors être minutieusement étudiées.

Nous avons démontré que notre méthode ne nécessitait la connaissance que d'une seule orbite périodique pour reconstruire l'ensemble de la population d'orbites périodiques. Les méthodes globales se révèlent ainsi des outils de prédiction puissants. Toutefois, nous devons déplorer un manque de robustesse qui n'autorise pas encore une application expérimentale systématique, bien qu'un cycle limite observé sur l'expérience du fil chaud [36] ait été reconstruit [37]. Sur ce plan, notre méthode offre des résultats analogues aux autres techniques utilisées :

- Par exemple, l'analyse en composantes principales présente l'avantage de fournir un filtre du bruit. Cependant M. Palus et I. Dvorák [13] démontrent que le niveau de bruit détecté dans le spectre de valeurs propres dépend plus du décalage temporel τ utilisé que de la quantité réelle de bruit dans les données expérimentales ; cette technique peut même générer du bruit ! Les auteurs concluent que l'utilisation de cette méthode comme technique de filtrage est douteuse et qu'elle peut aussi détruire de l'information sur le système dynamique au lieu du bruit.
- G. Rowland et J. C. Sprott [14] utilisent, eux aussi, l'analyse en composantes principales pour choisir les variables dépendantes appropriées à la reconstruction d'un espace des états. Ils constatent une simplification de la dynamique (due à l'application de l'analyse en composantes principales à une série bruitée). Ils sont également confrontés à des problèmes de robustesse : 90 % de leurs solutions sont instables. Ils établissent enfin une corrélation entre le nombre de termes autorisés par l'approximation de leur fonction et le nombre de solutions instables. Les problèmes de robustesse sont particulièrement présents dans le cas de systèmes symétriques.

A ce point, il est difficile d'établir laquelle de ces méthodes est la plus efficace : certaines offrent des reconstructions de qualité dans tel cas et des solutions divergentes dans d'autres, et vice versa. La grande faiblesse des dérivées réside dans leur comportement face au bruit : pourtant nous montrerons dans le chapitre suivant que là n'est pas l'essentiel du problème !

L'implantation de nouvelles techniques pour l'estimation des dérivées est en cours de réalisation. Ainsi les polynômes de Legendre vont être testés pour l'estimation d'une quantité proportionnelle aux dérivées. D'incessantes recherches sont poursuivies pour améliorer la robustesse de l'approximation de la fonction standard F_S .

Bibliographie

- [1] **J.F.Gibson, J. D. Farmer, M. Casdagli, S. Eubank.** An Analytic Approach to Pratical State Space Reconstruction, *Physica D*, 57, pp. 1-30, 1992.
- [2] **P. Grassberger, I. Proccacia.** Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica D*, 9, pp. 189- , 1983.
- [3] **J. P. Eckmann, S. Oliffson, D. Ruelle, S. Ciliberto.** Lyapunov exponents from time series, *Physical Review A*, 34 (6), pp. 4971-4979, 1986.
- [4] **G. B. Mindlin, R. Gilmore.** Topological analysis and synthesis of chaotic time series, *Physica D*, 58, pp. 229-242, 1992.
- [5] **N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw.** Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, 45 (9), pp.712-716, 1980.
- [6] **F. Takens.** Detecting Strange Attractors in Turbulence, in : *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, eds. D. A. Rand and L. S. Young, pub. Springer-Verlag, New York, pp. 366-381, 1981.
- [7] **Th. Buzug, G. Pfister.** Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors, *Physical Review A*, 45 (10), pp. 7073-7984, 1992.
- [8] **Th. Buzug, T. Reimers, G. Pfister.** Optimal Reconstruction of Strange Attractors from Purely Geometrical Arguments, *Europhysics Letters*, 13 (7), pp. 605-610, 1990.
- [9] **D. S. Broomhead, G. P. King.** Extracting qualitative dynamics from experimental data, *Physica D*, 20, pp. 217- , 1987.
- [10] **G. Gouesbet, J. Maquet.** Construction of phenomenological models from numerical scalar time series, *Physica D*, 58, pp. 202-215, 1992.
- [11] **T. Sauer, J. Yorke, M. Casdagli.** Embeddology, *Journal of Statistical Physics*, 65 (3/4), pp. 579-616, 1991.
- [12] **A. K. Agarwal, D. P. Ahalpara, P. K. Kaw, H. R. Prablakera, A. Sen.** Model equations from a chaotic time series, *Journal of Physics*, 35(3), pp.287-301, 1990.
- [13] **M. Paluš, I. Dvořák.** Singular-value Decomposition in Attractor Reconstruction Pitfalls and Precautions, *Physica D*, 55, pp. 221-234, 1992.
- [14] **G. Rowland, J. C. Sprott.** Extraction of Dynamical Equations from Chaotic Data, *Physica D*, 58, pp. 251-259, 1992.
- [15] **R. Badii, G. Broggi, B. Derighette, M. Ravani.** Dimension increase in filtered chaotic signals, *Physical Review Letters*, 60 (11), pp. 979-982, 1988.
- [16] **A. M. Fraser.** Reconstructing Attractors from scalar time series : A Comparison of Singular System and Redundancy criteria, *Physica D*, 34, pp. 391-404, 1989.
- [17] **M. Casdagli.** State space Reconstruction with noise, *Physica D*, 51, pp. 52-98, 1991.
- [18] **G. Gouesbet.** Reconstruction of the vector fields of conitnuous dynamical systems from numerical scalar time series, *Physical Review A*, 43 (10), pp. 5321-5331, 1991.

- [19] **G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, X. J. Hou.** Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski, *Journal of Nonlinear Sciences*, 1, pp. 147-173, 1991.
- [20] **G. Gouesbet.** Reconstruction of Vector Fields : the Case of Lorenz System, *Physical Review A*, 46(4), pp. 1784-1796, 1992.
- [21] **C. Letellier.** *Résistance au bruit de la méthode de reconstruction : cas des fonctions rationnelles polynômiales*, Rapport interne ESP/MO/01/92/I, LESP, Rouen, 1992.
- [22] **G. Gouesbet, C. Letellier.** Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets. submitted to *Physical Review E*.
- [23] **J. R. Rice.** *The approximation of functions*, 1 et 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964 et 1969.
- [24] **J. Cremers, A. Hübler.** Construction of Differential Equations from Experimental Data, *Zeitung Naturforsch*, 42 a, pp. 797-802, 1987.
- [25] **O. E. Rössler.** An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters*, 57A (5), pp. 397-398, 1976.
- [26] **E. N. Lorenz.** Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, pp. 130-141, 1963.
- [27] **G. Dahlquist, A. Björck.** *Numerical methods practice*, Hall,Inc. Englewood diifs, New Jersey, chap. 4, 1969.
- [28] **W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling.** *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [29] **G. P. King, I. Stewart.** Phase Space Reconstruction for Symmetric Dynamical Systems, *Physica D*, 58, pp.216-228, 1992.
- [30] **J. W. Swift, K. Wiesenfeld.** Suppression of Period Doubling in Symmetric Systems. *Physical Review Letters*, 52 (9), pp. 705-708, 1984.
- [31] **P. Cvitanović.** Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and Quantum Chaos, *Physica D*, 51, pp. 138-151, 1991.
- [32] **P. Dutertre.** *Caractérisation des attracteurs étranges à partir de leur population d'orbites périodiques*, Thèse de troisième cycle, LESP, Rouen, en préparation.
- [33] **E. Ott, C. Gregobi, J. A. Yorke.** *Physical Review Letters*, 64, pp. 1196- , 1990.
- [34] **J. M. T. Thompson, J. M. Stewart.** *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons, 1986.
- [35] **L. P. Sil'nikov.** The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1 (172), pp. 54-58, 1967.
- [36] **E. Ringuet, C. Rozé, G. Gouesbet.** Experimental observation of type-II intermittency in a hydrodynamic system, *Physical Review E*, 47 (2), pp. 1405-1407, 1993.
- [37] **L. Le Sceller.** *communication privée.*

Chapitre 6

Reconstruction en présence de bruit

6.1 Introduction

L'étude des systèmes dynamiques se fait couramment par l'intermédiaire d'une série temporelle. En effet, il est rare que la mesure simultanée de deux quantités soit possible. Toutefois cette série temporelle, d'après le principe de redondance de l'information au sein d'un système dynamique, contient toute l'information nécessaire à la complète connaissance du système. Pour accéder à cette information, il suffit de construire un jeu de variables indépendantes à partir de cette série temporelle. L'espace reconstruit sur la base de ces variables peut alors permettre de définir de manière unique les états du système.

Au chapitre précédent, nous avons testé notre technique de reconstruction dans le cas d'une série de données exempte de toute perturbation. Cependant, avant de l'appliquer à des systèmes expérimentaux, nous avons confronté la méthode aux complications du monde réel : le bruit.

Si le théorème de Takens [1] fournit une justification rigoureuse des techniques de reconstruction, il ne fournit qu'un guide sur la reconstruction d'espace des états du monde réel à partir de données bruitées. En effet, la série temporelle $x(t)$ du théorème est arbitrairement précise, résultant d'états arbitrairement précis. La conséquence de cela est que le décalage temporel τ peut prendre n'importe quelle valeur sans affecter la qualité des reconstructions (nous concevons toutefois que pour un cycle limite le décalage temporel ne peut être un multiple de la période). En pratique les conditions du théorème de Takens ne sont pas satisfaites : les séries temporelles expérimentales sont restreintes en résolution et en quantité. A cela s'ajoute la présence de bruit dans les données expérimentales qui perturbe les états et rend critique le choix d'un bon décalage temporel.

Plusieurs sources de bruit compliquent le problème des reconstructions à partir de séries expérimentales [2] :

le bruit observationnel : dû aux instruments de mesures ; la série temporelle réellement observée est de la forme

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \epsilon(t) \quad (6.1)$$

où $\tilde{x}(t)$ est la série temporelle exacte et $\epsilon(t)$ la variable aléatoire représentant le bruit. Le bruit $\epsilon(t)$ perturbe la série $\tilde{x}(t)$ autour de sa valeur mais n'en modifie pas profondément l'évolution. Le bruit est additionnel.

le bruit dynamique : dû aux influences extérieures qui perturbent l'évolution du système ; le système étudié n'est plus strictement déterministe et comporte une composante stochastique. Il peut être écrit sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \epsilon(t) \quad (6.2)$$

où \mathbf{f} est le champ de vecteurs exact du système et $\epsilon(t)$ la composante stochastique. Ce type de bruit implique une perturbation profonde du comportement dynamique assimilable à une variation des paramètres de contrôle du système (section 6.2.2).

l'erreur d'estimation : Le champ de vecteur \mathbf{f} et le flot ϕ_t ne sont pas connus. Nous pouvons estimer la dynamique dans l'espace des états reconstruit, mais avec une quantité finie de données, cette approximation n'est jamais parfaite.

Pour étudier l'influence du bruit sur la qualité de la reconstruction d'un système dynamique, on utilise la variable $y(t)$ du système proposé par O. Rössler [3] en raison de la grande robustesse de la technique de reconstruction à partir de cette variable (chapitre 5). Rappelons que le système standard associé à cette variable est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = X \\ \dot{X} = F_S(X, Y, Z) \end{cases} \quad (6.3)$$

où F_S est la fonction standard exacte dont l'expression analytique, déduite du système original, est

$$F_S(X, Y, Z) = -b - cY + (ac - 1)Z + (a - c)X - aY^2 + (a^2 + 1)YZ + aXY - aZ^2 + XZ \quad (6.4)$$

La méthode de reconstruction utilisée projette la fonction standard sur une base de polynômes multivariés : on obtient alors une fonction estimée $\tilde{F}_S(X, Y, Z)$ qui s'écrit

$$\tilde{F}_S(Y, Z, X) = K_1 + K_2 Y + K_3 Z + K_4 X + K_5 Y^2 + K_6 YZ + K_7 YX + K_8 Z^2 + K_9 ZX + \dots \quad (6.5)$$

où l'ensemble $\{K_p\}$ définit le spectre naturel de l'attracteur reconstruit. Dans le cas considéré, la fonction standard exacte F_S ne présente pas de singularités. Ainsi les coefficients K_p peuvent être connus théoriquement. Leur expression analytique et leur valeur numérique sont données dans le tableau 6.1.

TAB. 6.1 – Expressions analytiques et numériques des coefficients K_p pour : $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$.

K_p	Expression analytique	Expression numérique
1	-b	-2
2	-c	-4
3	ac - 1	0.592
4	a - c	-3.602
5	-a -	0.398
6	$a^2 + 1$	1.158404
7	a	0.398
8	-a	-0.398
9	1	1
10	0	0

La décomposition de la fonction standard F_S sur la base de polynômes multivariés choisie est donc exacte. De ce fait, elle présente une grande robustesse et reste satisfaisante avec une décomposition sur plus de 200 termes [4]. Nous avons vu au chapitre précédent que la fonction standard F_{S_y} du système de Rössler est constituée de 9 termes qui correspondent aux 9 premiers éléments de la base des P^i . Ainsi, seuls les 9 premiers coefficients de la décomposition sont différents de 0.

Chaque reconstruction est caractérisée par un *vecteur pilote* constitué des variables suivantes :

h échantillonnage de la série temporelle

N_q nombre total de points retenus avec leurs dérivées successives pour l'approximation de la fonction standard F_S

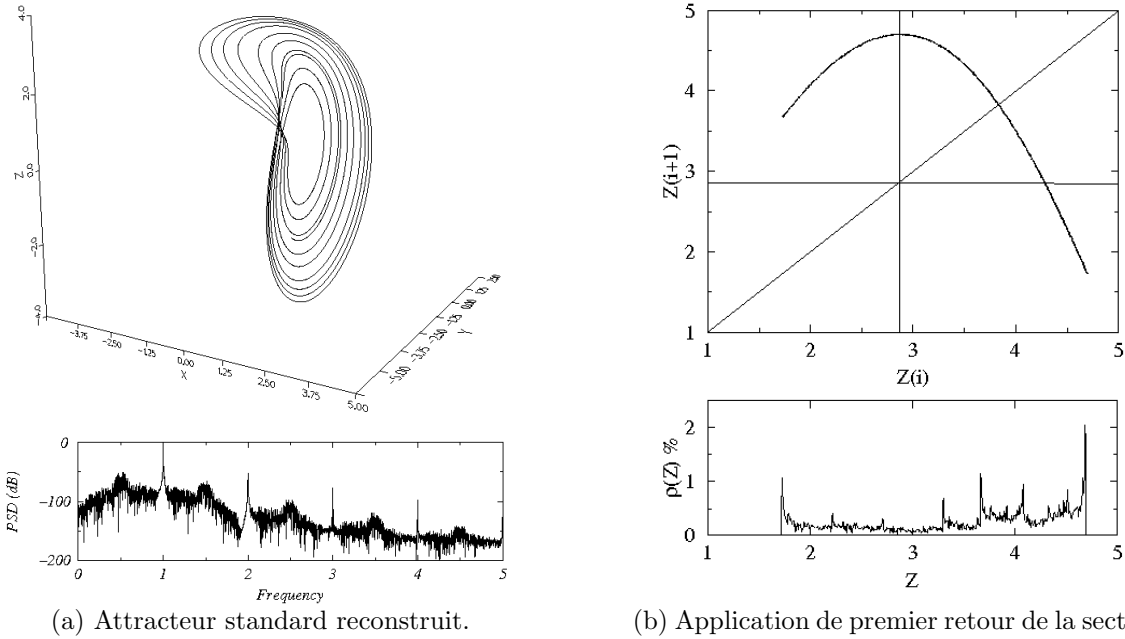
N_s nombre de points retenus avec leurs dérivées successives par pseudo-période T_0

N_p nombre de termes sur lesquels l'approximation est réalisée (nombre de coefficients K_p) : il détermine la dimension de l'espace sur lequel F_S est projetée

Ainsi la série temporelle utilisée doit être échantillonnée à la fréquence minimale $f = 1/h$ et constituée d'un nombre minimum de points N défini par :

$$N = fT \quad (6.6)$$

où T est la durée de la mesure. Evidemment nous devons avoir la relation $N > N_s$, le calcul des dérivées nécessitent de connaître les voisins des points retenus. Toute cette étude sera menée avec des données compatibles avec l'expérience. La fréquence de l'échantillonnage sera donc limitée à $10000H_z$ ($h = 10^{-4}s$) et le nombre N de points à 5.10^6 environ (compatible avec les possibilités d'acquisition d'une station de travail).



(a) Attracteur standard reconstruit.

(b) Application de premier retour de la section P_s à elle-même et distribution de probabilité de visite exprimée en pourcentage.

FIG. 6.1 – Attracteur reconstruit par intégration du système standard après approximation de la fonction standard exacte.

Une reconstruction satisfaisante peut être obtenue [4] avec un vecteur pilote de $(h, N_q, N_s, N_p) = (10^{-3}, 10, 10, 10)$. L'attracteur obtenu par intégration du système standard reconstruit (6.3) est présenté figure 6.1. Il est accompagné de son application de premier retour dans la section de Poincaré P_S définie par

$$P_S = \left\{ (X, Y, Z) \in R^3 \mid Z = 0, \frac{\partial \phi_0}{\partial Y} > 0 \right\} \quad (6.7)$$

où ϕ_t est le flot associé au système standard reconstruit. Par la suite, lorsqu'une application de premier retour sera présentée, elle sera toujours obtenue à partir de cette section de Poincaré. En particulier, la fréquence de visite d'un intervalle donné de la section de Poincaré peut être modifiée sans que cela apparaisse sur l'application de premier retour. En effet, ceci résulte de la résolution graphique, aussi nous ferons appel à la densité invariante naturelle $\rho(Z)$ [5]. La densité invariante $\rho(Z)$ est obtenue par décomposition de la section de Poincaré P_S en une centaine d'intervalles. La probabilité de visite de ces intervalles est alors extraite sur 10000 intersections avec la section P_S et utilisée comme approximation de la densité invariante $\rho(Z)$. Evidemment, plus petits sont les intervalles et plus grand est le nombre d'intersections avec P_S , meilleure est l'approximation [5]. Rappelons qu'une trajectoire chaotique est vue comme circulant au voisinage d'un squelette d'orbites périodiques [6], c'est à dire qu'elle est sans cesse attirée et repoussée sur les variétés stable et instable des objets hyperboliques que sont les orbites périodiques. Ainsi la densité invariante $\rho(Z)$ est intimement liée à la population d'orbites

périodiques de l'attracteur standard A_s . La densité $\rho(Z)$ est donc une signature de l'attracteur. En effet, la densité invariante $\rho(Z)$ possède la particularité de présenter des singularités localisées sur les itérés du point critique. Elle renseigne donc sur la dernière orbite périodique apparue au sein de l'attracteur. Elle permet ainsi de détecter les plus faibles variations des paramètres de contrôle.

De manière à traiter une série temporelle réaliste du point de vue expérimental, du bruit simulant les incertitudes de mesure doit être ajouté. Il sera choisi gaussien et son amplitude sera définie relativement aux variations de la série numérique par le rapport signal/bruit S_b qui constituera une variable composante au vecteur pilote. Le calcul des dérivées par différences finies étant très sensible aux moindres fluctuations, un lissage devra être introduit. Le vecteur pilote contiendra une sixième composante relative à ce lissage : il s'agit d'une fréquence de coupure f_c au delà de laquelle le spectre de puissance est coupé. Le vecteur pilote est alors de la forme $(h, N_q, N_s, N_p, S_b, f_c)$.

6.2 Le bruit

6.2.1 Bruitage

La confrontation avec des données expérimentales est toujours sujette à des controverses : est-ce du chaos ou est-ce du bruit ? Pourtant, là n'est pas toujours la question ! Du point de vue expérimental, le bruit et le chaos ne sont pas deux catégories mais deux extrêmes [7] : rarement les systèmes rencontrés sont entièrement déterministes ou purement aléatoires, c'est toujours un mélange des deux. Aussi avons-nous à ajouter une composante aléatoire $\epsilon(t)$ à la série numérique extraite de l'intégration du système de Rössler.

La composante aléatoire $\epsilon(t)$ est régie par une distribution gaussienne de variance $\sigma^2 = 2$ [8] et écrêté au-dessus de σ . Afin de quantifier les effets secondaires dûs au bruit de mesure et à la mauvaise réaction éventuelle de la technique de reconstruction, le bruit ne sera pas inséré dans le champ de vecteurs (relation 6.2) car il impose alors une modification de l'espace des paramètres qui ne peut être évaluée avec précision, tant du point de vue expérimental que numérique (voir section 6.2.2). Seul le bruit observationnel sera pris en compte. De ce fait nous choisissons de bruiteur la série numérique de manière additive :

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \alpha \epsilon(t) \quad (6.8)$$

où $\tilde{y}(t)$ est la série temporelle numérique issue de l'intégration du système de Rössler et α un coefficient multiplicatif déterminant l'amplitude du bruit. Le rapport signal/bruit S_b est défini par :

$$S_b = 10 \log \left(\frac{\sigma_{signal}^2}{\sigma_{bruit}^2} \right) \quad (6.9)$$

et exprimé en dB . De cette manière, une série numérique bruitée représentative d'un signal expérimental est obtenue. Pour un échantillonnage à 100 Hz et un rapport signal/bruit $S_b \approx 27dB$ la série scalaire bruitée $y(t)$ est représentée figure 6.2. Lorsque la série numérique n'est pas bruitée, le rapport signal/bruit est dit infini et sera noté $S_b = \infty$.

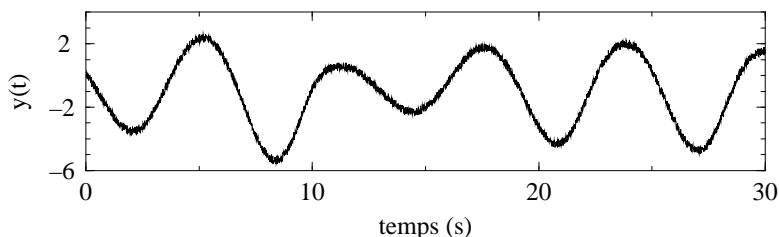


FIG. 6.2 – Série temporelle échantillonnée à 100 Hz et bruitée avec un rapport signal/bruit $S_b \approx 27dB$.

6.2.2 Modification de l'espace des paramètres

Une reconstruction de l'attracteur de Rössler est donc tentée en présence de bruit. Dès les plus grands rapports signal/bruit (de l'ordre de 138 dB), la reconstruction pilotée par le vecteur $(10^{-3}, 10, 10, 10, 138, 0)$ échoue. L'adjonction de bruit, même très faible, a fortement augmenté le degré d'instabilité du système : l'ensemble attracteur est détruit et la trajectoire est éjectée à l'infini. La technique de reconstruction nantie d'un tel vecteur pilote est effectivement très sensible à toute perturbation. Un faible bruit introduit une disparité des données (tout particulièrement sur les dérivées qui lui sont très sensibles) telle que la cohésion nécessaire à l'obtention d'un ensemble attracteur n'est plus atteinte.

Nous avons observé que le taux d'information (le nombre de points N_q) doit être augmenté avec l'amplitude des perturbations apportées. D'une certaine manière, le caractère aléatoire du bruit est absorbé par l'approximation (proche d'une technique de moindre carré) de l'échantillon alors redondant. Ainsi une augmentation du nombre N_q de points permet de récupérer un ensemble attracteur (Fig. 6.3). Si un cycle limite de période 1 contient plus d'information qu'une trajectoire divergente, sa dynamique n'en demeure pas moins très pauvre.

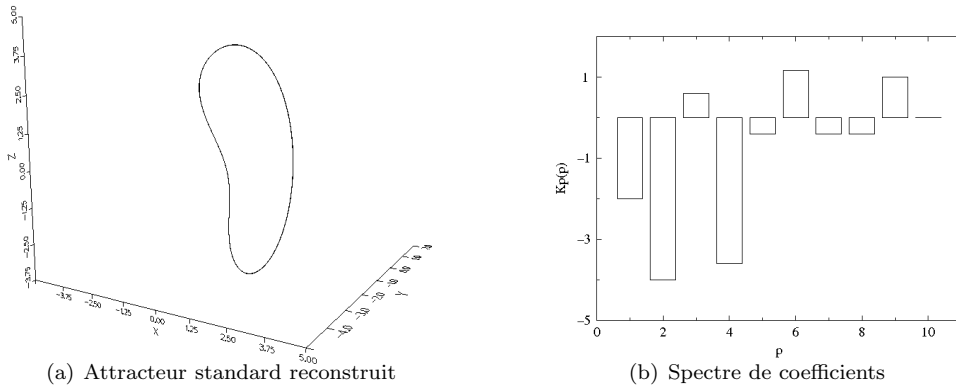


FIG. 6.3 – Système standard reconstruit avec le vecteur pilote $(10^{-3}, 100, 10, 10, 138, 0)$.

Le nombre de points N_q de l'échantillon est encore augmenté de manière à améliorer la statistique sur les coefficients K_p . L'attracteur présente alors une structure plus riche (Fig. 6.4.a). Il possède désormais une application de premier retour continue caractéristique d'un régime chaotique. Toutefois, deux branches monotones supplémentaires sont apparues (Fig. 6.4.b). La dynamique de l'attracteur s'est donc enrichie de deux lettres. La cohérence (un attracteur est dit cohérent lorsque les fluctuations de sa période de révolution sur l'attracteur par rapport à sa pseudo-période sont faibles [9]) est alors détruite (comparer le spectre de puissance de la figure 6.4.c et celui de la figure 6.1). Il existe en effet une forte corrélation entre la perte de cohérence et l'apparition d'une troisième lettre [10]. Les propriétés dynamiques de cet attracteur reconstruit sont donc très différentes de celles du système original. Le bruit a déstabilisé la dynamique : il y a translation dans l'espace des paramètres.

Cependant cette modification n'est pas spécifique à la technique de reconstruction utilisée. En effet, de par leur structure, les attracteurs étranges ont un comportement particulier vis à vis du bruit. *“Les opérations d'étirement et de repliement des attracteurs étranges suppriment les informations initiales et les remplacent par d'autres : l'opération d'étirement augmente les incertitudes à petite échelle et l'opération de repliement, en rapprochant des trajectoires initialement très éloignées l'une de l'autre, supprime toutes les informations à grande échelle”* [11]. De cette manière toute fluctuation microscopique due au bruit est amplifiée jusqu'à devenir une variation macroscopique. Les attracteurs étranges jouent donc le rôle d'un amplificateur de bruit. *“Il existe cependant une différence fondamentale entre un attracteur étrange et un banal amplificateur de bruit : du fait de la répétition ininterrompue des opérations d'étirement et de repliement, ce sont des fluctuations d'importance minimale qui dominent finalement le système tout entier”* [11]. Ainsi, un système chaotique génère son propre bruit dans la mesure où la connaissance d'un état ne peut être infiniment précise. Suivant cette idée, une augmentation du bruit introduit une transition vers le chaos. Toutefois, au lieu de déstabiliser le mouvement chaotique dans l'espace des phases, le bruit étend le chaos tandis qu'il détruit les cycles limites [12]. Ceci a été observé sur un

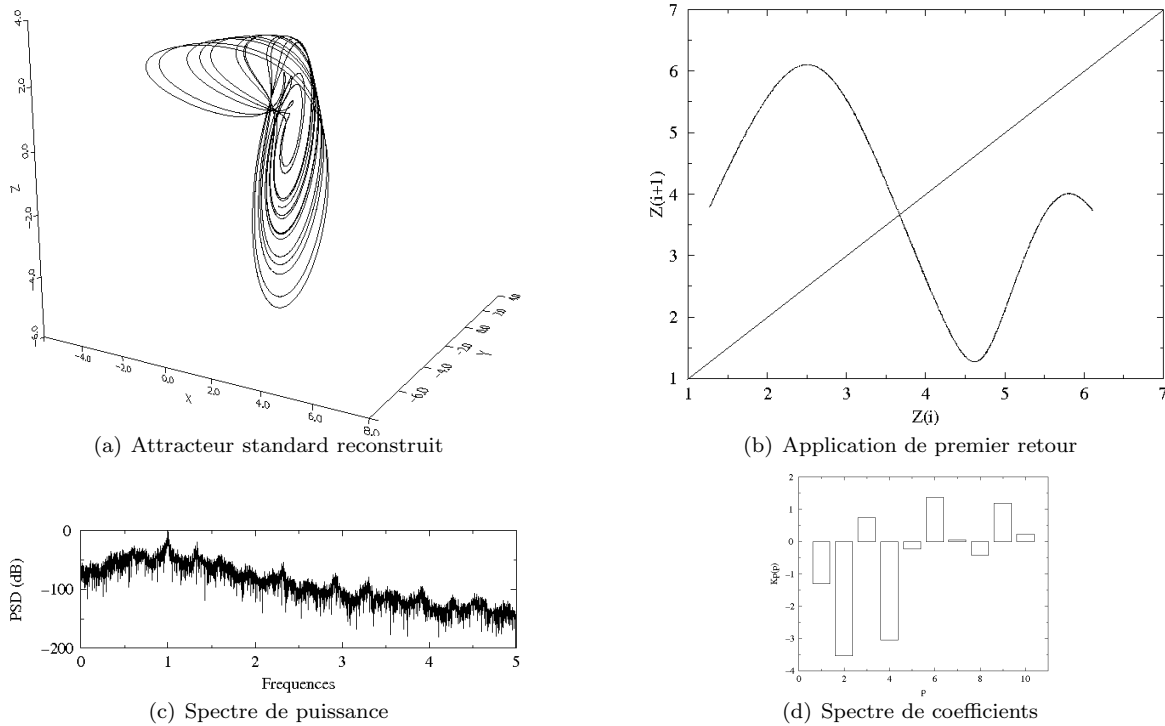


FIG. 6.4 – a) Système standard reconstruit à l'aide du vecteur de pilotage $(10^{-3}, 650, 10, 10, 170, 0)$ accompagné de son spectre de puissance, b) son application de premier retour et c) son spectre de coefficients

cycle limite de période 2 du système de Rössler pour un vecteur de contrôle $(a, b, c) = (0.340, 2, 4)$. Le champ de vecteurs a été bruité (et non la série temporelle comme c'était le cas précédemment) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + \alpha \epsilon_1 \\ \dot{y} = x + ay + \alpha \epsilon_2 \\ \dot{z} = b + z(x - c) + \alpha \epsilon_3 \end{cases} \quad (6.10)$$

où ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 sont trois nombres aléatoires de distribution gaussienne. Pour un rapport signal/bruit S_b de l'ordre de $44dB$, le cycle limite de période 2 a perdu son aspect périodique pour laisser place à une trajectoire apériodique (voir Fig. 6.5).

Le spectre de puissance ne présente plus le pic correspondant à la fréquence $f_0/2$ (tous les spectres, sauf remarques contraires, sont donnés en fréquences adimensionnalisées par rapport à la fréquence f_0 de la pseudo-période). Seule la fréquence associée à la pseudo-période de l'attracteur reste évidente. La large bande accompagnée d'un pic en fait un spectre caractéristique d'un régime chaotique. Le bruit détruit la stabilité du cycle limite et joue le rôle déstabilisateur à l'origine du régime chaotique. Au passage d'un cycle limite de période 2 de la cascade de doublements de période à un attracteur chaotique est associée une création d'orbites périodiques instables (voir chapitre 2). Le bruit se comporte donc comme un générateur d'orbites périodiques. En d'autres termes, "les fluctuations agissent comme un champ désorganisateur sur la dynamique déterministe" [12] et augmentent l'observabilité du chaos. De ce fait, il se produit une modification de l'espace des paramètres dans la mesure où certaines bifurcations sont estompées par le bruit (expérimentalement la cascade de doublements de période ne peut être suivie au delà de quelques bifurcations). Cette modification de l'espace des paramètres en présence de bruit est étudiée de manière détaillée par S. J. Ling et M. Lücke [13].

L'évolution d'un système est plus ou moins perturbée par les influences extérieures suivant sa capacité à

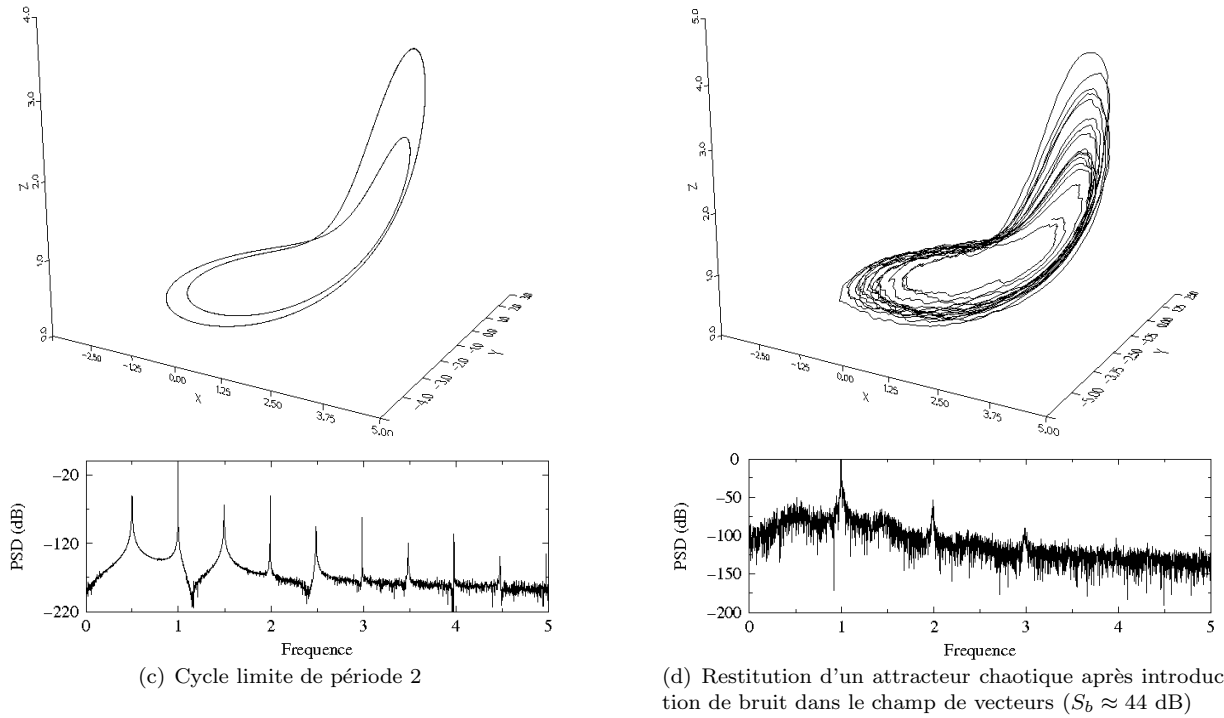


FIG. 6.5 – Cycle limite de période 2 et son spectre de puissance (système de Rössler $(a, b, c) = (0.340, 2, 4)$) modifié par perturbation du champ de vecteurs.

amplifier le bruit. Ceci peut être qualitativement illustré sur les équations du système de Rössler :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (6.11)$$

Supposons que nous observons y . Puisque \dot{y} ne dépend pas directement de z , l'information sur z dépend du flot d'information à travers x ; lorsque z varie cela induit un changement de \dot{x} et par là-même une variation de x . Imaginons une perturbation sur la variable x . Elle sera répercutée immédiatement sur \dot{y} et \dot{z} . Etant donné la linéarité de \dot{y} avec x , cette perturbation ne sera pas particulièrement amplifiée. Par contre, en raison du couplage xz au sein de \dot{z} , lorsque z est grand, cette perturbation sera amplifiée et réinjectée dans \dot{y} via l'observable x avec un retard. Plus les propriétés d'étirement du système seront élevées (exposant de Lyapunov important) plus le bruit sera amplifié. C'est de cette manière qu'un faible bruit ($S_b \approx 44$ dB) peut être exponentiellement amplifié au sein d'un système jusqu'à en modifier de manière significative le comportement dynamique [2].

Le bruit développe le chaos (déstabilisation) et entraîne l'apparition de lettres supplémentaires, toujours associée à une destruction de la cohérence de l'attracteur. Du point de vue de la reconstruction, augmenter le nombre de points N_q de l'échantillon permet de transmettre plus d'information sur le système et de passer d'un système standard reconstruit divergent à un cycle limite (Fig. 6.3) et, finalement, à un attracteur possédant les propriétés fractales requises (Fig. 6.4). Toutefois, cette augmentation de N_q s'associe à un enrichissement de la dynamique, c'est à dire à l'apparition de lettres supplémentaires. Même si la structure fractale a tendance à s'enrichir, des fenêtres de divergence apparaissent entre des fenêtres de comportements chaotiques : ce phénomène reste inexpliqué.

Enfin, le nombre de points N_s par pseudo-période ne doit pas être trop élevé. En effet, l'approximation se réalise d'autant plus mal que les points sont rapprochés. Ceci peut se comprendre dans la mesure où, dans le cas de fortes concentrations de points, la méthode est confrontée à de brusques variations sur de petits voisinages : l'approximation ne peut alors se faire sans trop de contraintes.

6.2.3 Augmentation de la dimension

La modification de l'espace des paramètres implique une variation des invariants géométriques qui caractérisent habituellement un attracteur comme sa dimension et ses exposants de Lyapunov. Perturber un système dynamique par une composante aléatoire $\epsilon(t)$ (due au bruit observationnel par exemple) augmente sa dimension [14]. Ceci est particulièrement sensible dès que nous travaillons dans un espace reconstruit. En effet, l'imprécision de notre connaissance sur les états du système ne permet plus de distinguer certains états qui devraient l'être. L'un des critères de qualité des méthodes de reconstruction est basé sur l'absence d'intersections de la trajectoire avec elle-même (respect du principe du déterminisme) ; aussi l'adjonction de bruit impose une augmentation de l'espace reconstruit pour pallier à cet effet. Ceci peut être compris de la manière suivante :

Soit un état reconstruit y inscrit sur la sous-variété $\Phi(M)$ de l'espace reconstruit de dimension m où Φ définit un plongement. Supposons que la mesure soit entachée de bruit $\xi(t)$ de distribution gaussienne de variance σ . L'état est défini à l'intérieur d'une boule de rayon σ centrée sur y : c'est une gaussienne isotrope centrée sur $y = \Phi(x)$, $x \in M$. Lorsque la sous-variété $\Phi(M)$ se comporte bien, l'état reconstruit permet de remonter à l'état vrai par la transformation Φ^{-1} (Fig. 6.6.a). Par contre si la sous-variété $\Phi(M)$ est telle que la boule de rayon σ centrée sur y possède plusieurs intersections avec $\Phi(M)$, alors il devient impossible de remonter à l'état vrai x sans ambiguïté (Fig. 6.6.b). Tout se passe comme si Φ n'était plus un plongement. La dimension m doit être augmentée pour pallier aux self-intersections intempestives de la sous-variété $\Phi(M)$. La dimension de l'espace des états original sera alors surestimée. De cette manière, la dimension de l'attracteur a été augmentée par la présence du bruit.

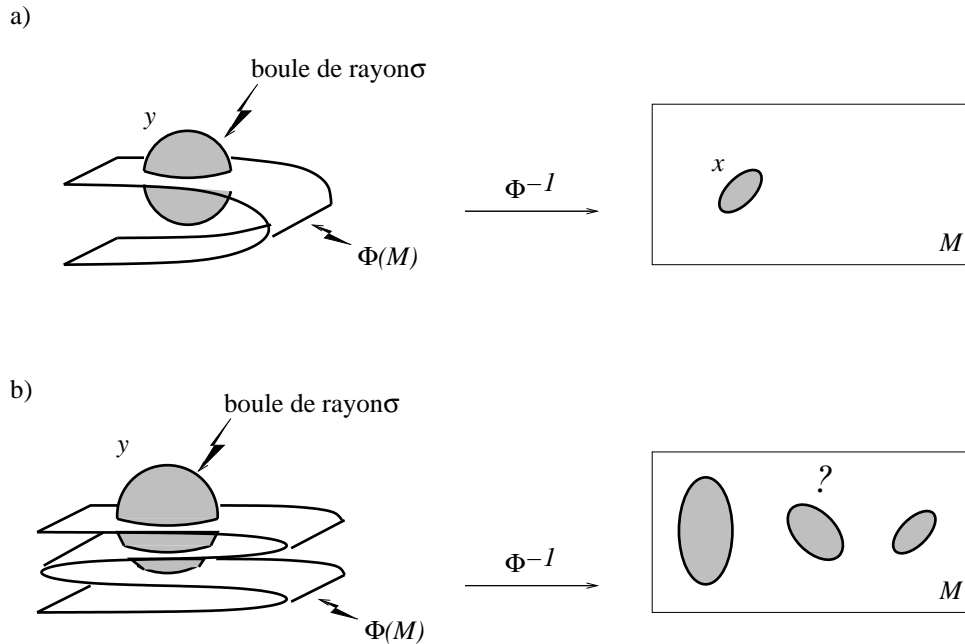


FIG. 6.6 – Influence de l'amplitude du bruit sur la qualité de la reconstruction : a) amplitude suffisamment faible pour interdire les self-intersections de la sous-variété $\Phi(M)$ et b) amplitude importante du bruit entraînant une violation du déterminisme.

La détermination d'une dynamique reconstruite s'avère donc délicate en raison de la difficulté à distinguer certains états en présence de bruit. Ainsi pour des paramètres de contrôle donnés, le bruit contribue à développer le chaos : le comportement observé est alors celui que le système génère pour des valeurs différentes des paramètres de contrôle. La modification de l'espace des paramètres observée en présence de composante aléatoire trouve ainsi une justification (il existe en effet une corrélation entre une dimension supérieure et un chaos plus développé).

6.3 Le lissage

6.3.1 Les techniques

Nous avons vu que de très faibles fluctuations sur la série scalaire temporelle suffisaient à perturber significativement la reconstruction. La moindre perturbation sur la série temporelle engendre une dérivée troisième $\dot{X}(t) = \ddot{y}(t)$ très imprécise (Fig. 6.7).

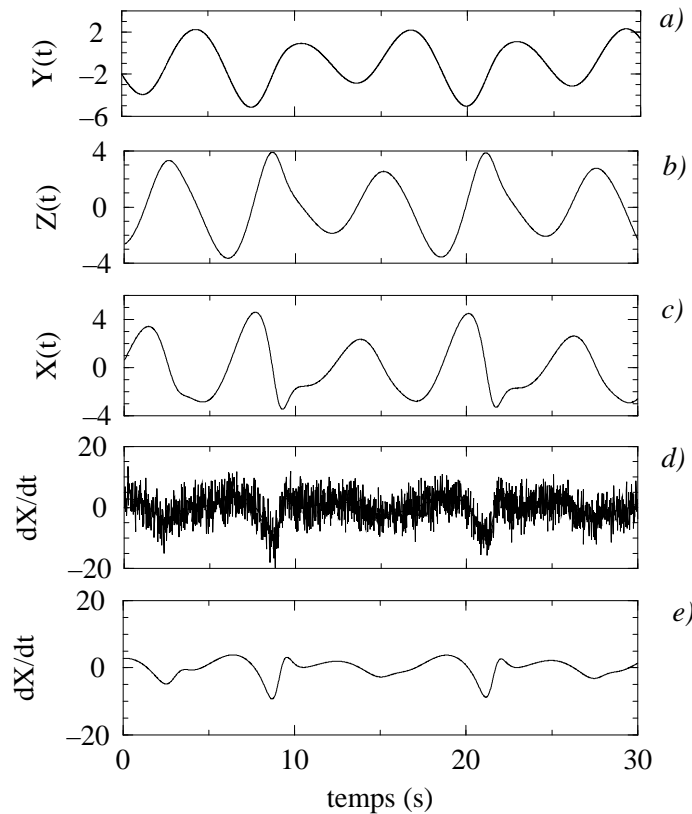


FIG. 6.7 – a) Série temporelle perturbée avec un important rapport signal/bruit ($S_b \approx 138$ dB) et ses dérivées b) première, c) seconde et d) troisième et, e) dérivée troisième exempte de toutes perturbations.

Si les variables $Y(t)$, $Z(t)$ et $X(t)$ ne semblent pas affectées par un faible bruit ($S_b \approx 138$ dB), la dérivée troisième $\dot{X}(t)$ est noyée dans un nuage de points. Les dérivées, lorsqu'elles sont estimées par un schéma aux différences finies (voir chapitre 5), se comportent comme des amplificateurs de bruit. Il est donc nécessaire de remédier à toute perturbation, aussi minime soit-elle. Ainsi avant toute analyse, les effets du bruit doivent être éliminés ou au moins minimisés.

La technique de lissage utilisée est basée sur un filtrage passe-bas utilisant la transformée de Fourier discrète [8]. Elle permet le lissage d'un tableau d'ordonnées (la série temporelle) rangées par abscisses croissantes (le

temps). Le lissage est dit semi-paramétrique dans le sens où les abscisses ne sont pas utilisées et qu'elles doivent être incrémentées de manière constante. Cette procédure est efficace lorsque le spectre de puissance du processus décroît rapidement vers zéro [15]. Dans ce cas un filtre de Wiener peut être appliqué et la fréquence de coupure f_c aisément déterminée [8]. Malheureusement lorsque le spectre n'est pas monotone et présente des pics distribués sur une large bande, le problème est plus compliqué. La distinction entre les éléments significatifs du spectre et les autres est rendue aléatoire par l'adjonction du bruit ; la détermination de la fréquence de coupure est alors une tâche ardue.

La technique de lissage par transformée de Fourier peut sembler, il est vrai, quelque peu rustre. Il existe d'autres méthodes telles que celle proposée par T. Sauer [16] qui est basée sur une reconstruction de l'espace des phases par décalages temporels à partir de coordonnées issues d'un filtre passe-bas local ; il utilise ensuite une décomposition en valeurs singulières [17] pour distinguer la dynamique du bruit. Malheureusement P. Grassberger *et al* [18] montrent que la décomposition en valeurs singulières se comporte comme un filtre de Wiener et présente les mêmes défauts qu'un lissage par transformée de Fourier. Une autre méthode, celle de T. Schreiber et P. Grassberger [19] semble n'être réellement efficace que pour les applications discrètes [18].

En tout état de cause, l'ensemble des méthodes offre de bonnes performances lorsque la série temporelle est sur-échantillonnée [18]. Ainsi, nous utiliserons la méthode par transformée de Fourier [8]. Le taux de lissage est grossièrement relié au nombre de voisins sur lesquels un point est lissé. Dans l'espace de Fourier, ce taux est directement relié à une fréquence de coupure. Ainsi une série échantillonnée à la fréquence f lissée en tenant compte de n voisins voit son spectre de puissance coupé à la fréquence $f_c \approx \frac{f}{n}$ (cette fréquence de coupure est donnée en Hz).

6.3.2 Simplification de la dynamique

La compréhension des effets secondaires du lissage va être tentée. Un lissage est appliqué à une série scalaire numérique $y(t)$ du système de Rössler exempte de toute perturbation. Les premières modifications significatives surviennent pour une fréquence de coupure de l'ordre de 3.33 Hz. L'attracteur reconstruit présente un chaos plus développé que celui de la configuration originale (Fig. 6.8.a). En effet la première branche de son application de premier retour (Fig. 6.8.b) s'est développée par rapport à celle présentée figure 6.1.b. Cela correspond notamment à une autorisation des séquences (00) au sein d'une trajectoire alors qu'elles étaient interdites sur l'attracteur original.

Ce comportement est relativement surprenant dans la mesure où l'image stéréotypée d'un lissage est plutôt celle d'un réducteur d'information. En effet un lissage, quel qu'il soit, a tendance à écrêter les maxima des oscillations d'une série (Fig. 6.9). Ces effets secondaires agissent un peu à la manière d'un contrôle et ramènent la trajectoire dans des zones interdites sur l'attracteur original, c'est à dire hors du ruban défini par l'attracteur. Ainsi, pour des fenêtres de lissage assez importantes ($f_c \approx 3.33H_z$), la dérivée troisième ($\dot{X}(t)$ dans la notation choisie) est écrêtée (Fig. 6.9).

Remarquons qu'avec une fréquence de coupure à 3.33 Hz, f_c se situe très au delà des fréquences prépondérantes dans le spectre de puissances (Fig. 6.10).

Ainsi le lissage peut être vu comme une censure de l'information puisqu'il a la fâcheuse tendance à transformer des attracteurs en cycles limites. Pour une telle valeur, le lissage a donc modifié l'attracteur en déplaçant des points vers le cœur de l'attracteur. Cependant l'effet réducteur du lissage n'a pas encore agi car ces points générateurs d'information viennent en complément des points non perturbés. Globalement, l'attracteur s'est enrichi par des visites de la région lacunaire centrale. Ceci provient du choix des points : seulement dix points par pseudo-périodes sont retenus. Ces points se répartissent sur l'attracteur avec une distribution respectant la mesure naturelle. Ainsi, les points des portions non perturbées du vecteur reconstruit (dans le cas précédent, les régions de fortes pentes de la variable $\dot{X}(t)$) sont assimilés à de l'information dynamique sur l'attracteur original alors que les zones perturbées (les crêtes des oscillations) offrent de l'information sur de la dynamique qui n'est pas obligatoirement inscrite dans l'attracteur original (au voisinage du point fixe central). Par exemple, l'amplitude écrêtée d'une oscillation peut générer un point en dehors de la bande chaotique. Ce point autorisera un comportement dynamique interdit sur l'attracteur original : par exemple une séquence (00). Ainsi, une technique de lissage peut, sous certaines conditions, se comporter comme un générateur d'instabilités ! Un résultat

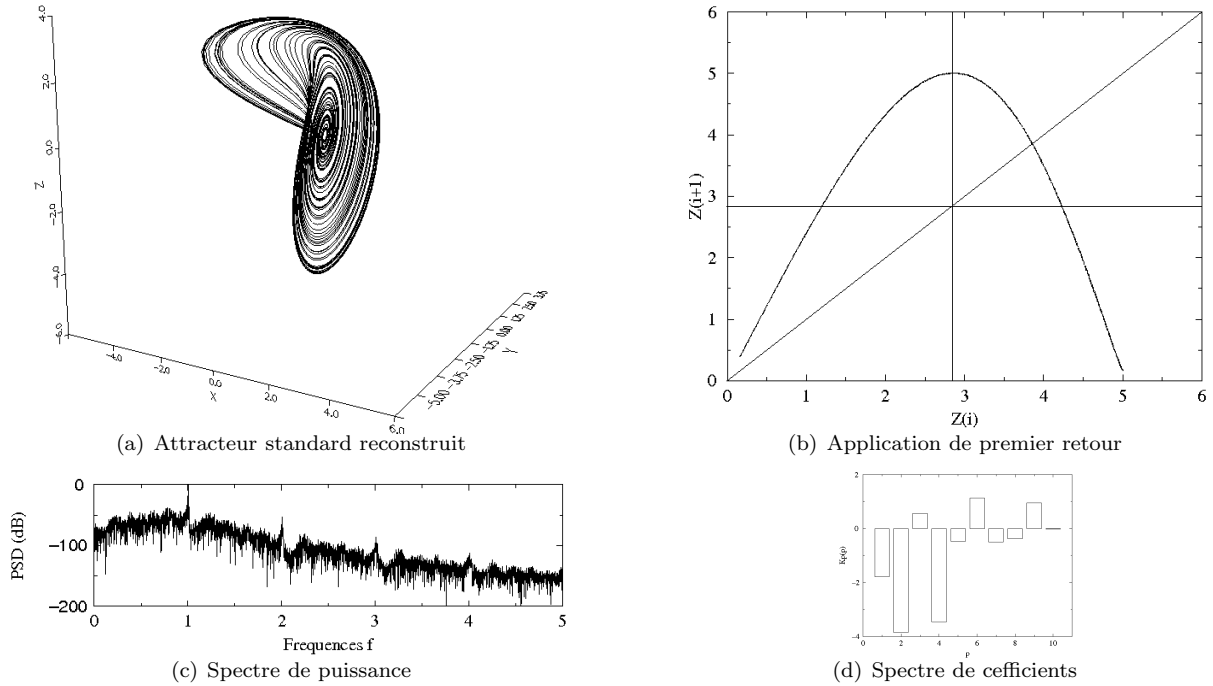


FIG. 6.8 – (a) Attracteur reconstruit sous un vecteur pilote $(10^{-3}, 10, 10, 10, \infty, 3.33)$, (b) son application de premier retour, (c) son spectre de puissances et (d) son spectre de coefficients.

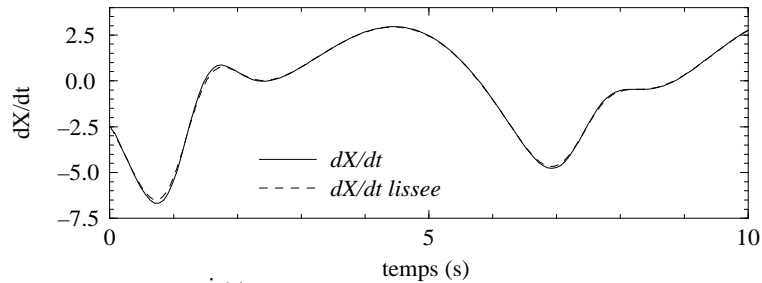


FIG. 6.9 – Perturbations de la série $\dot{X}(t)$ issues d'un lissage par Transformée de Fourier discrète : $f_c = 2$ Hz.

analogue a été observé par A. I. Mees et K. Judd [20] pour de faibles itérations d'un filtre géométrique (qui utilise les propriétés spatiales de la dynamique dans un espace reconstruit) : ils observent alors une augmentation de la dimension de leur signal. Lorsqu'ils augmentent le nombre d'itérations de leur filtre, la dimension du signal décroît en accord avec la simplification de la dynamique que nous sommes en mesure d'attendre d'une technique de lissage. W. F. Lawkins *et al* [21] observent des résultats analogues.

Lorsque le taux de lissage est augmenté, l'attracteur continue de se développer : ainsi, pour un vecteur pilote de $(10^{-3}, 10, 10, 10, \infty, 1.8)$ un attracteur à trois lettres (trois branches monotones sur l'application de premier retour) est obtenu (Figs. 6.11.a et 6.11.b). Au delà, la destruction de l'information intervient et pour le vecteur $(10^{-3}, 10, 10, 10, \infty, 1.3)$ seul un cycle limite peut être obtenu. Remarquons qu'alors la fréquence de coupure avoisine la fréquence seuil au delà de laquelle le spectre ne présente plus qu'une large bande de bruit (Fig. 6.10).

Cette restriction de l'information provient des modifications importantes qui interviennent aux extrema des oscillations. Ceci est d'autant plus regrettable que c'est par ses variations d'amplitude qu'un signal peut se révéler chaotique (la période est peu différente de la pseudo-période de l'attracteur et n'est pas affectée par le lissage). Toutefois cette réduction d'information est heureusement opposée à l'augmentation d'information observée lors de l'adjonction de bruit. Les deux aspects pourront donc se compenser!...

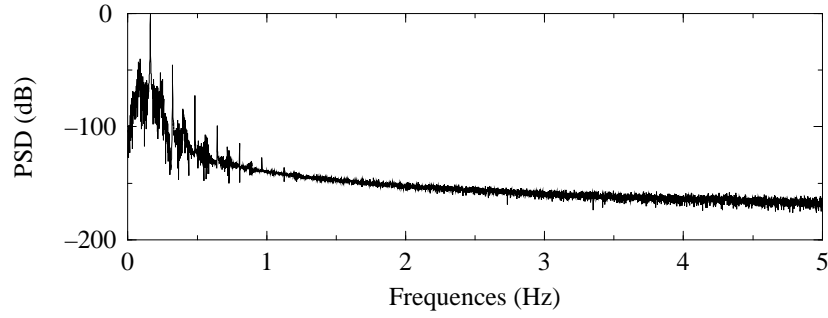
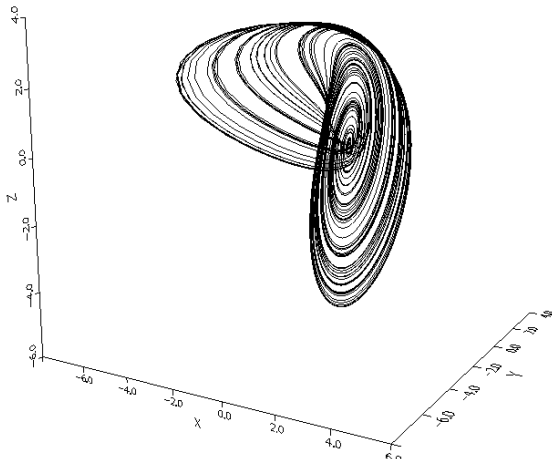
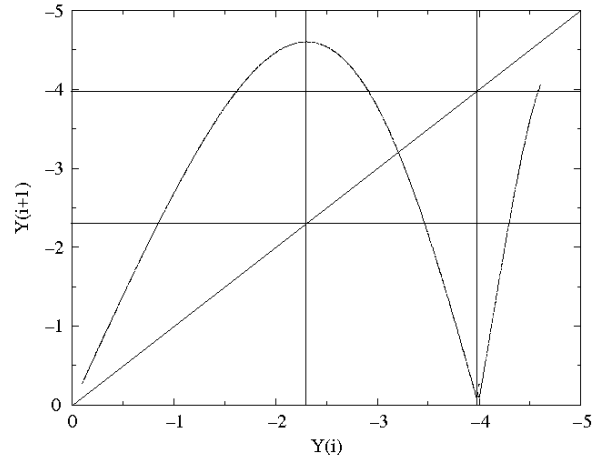


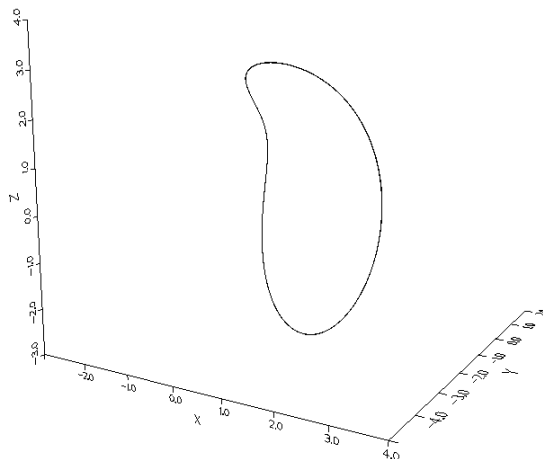
FIG. 6.10 – Spectre de puissance de la série $y(t)$ du système de Rössler : les fréquences sont données en Hz.



(a) Attracteur reconstruit ($10^{-3}, 10, 10, 10, \infty, 1.8$)



(b) Application de premier retour ($10^{-3}, 10, 10, 10, \infty, 1.8$)



(c) Cycle limite reconstruit de période 1 codé par la séquence (1) ($10^{-3}, 10, 10, 10, \infty, 1.3$)

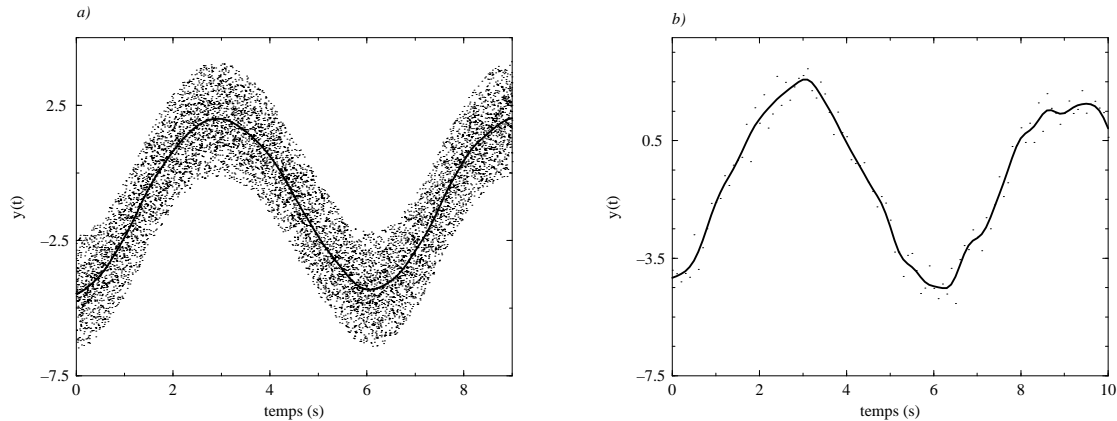
FIG. 6.11 – Influence de la fréquence de coupure du filtre sur la dynamique des attracteurs standards reconstruits.

6.4 Influence du taux d'information

6.4.1 Bruit et Estimation

Il existe plusieurs raisons pour lesquelles l'approximation de la fonction standard F_s est plus ou moins précise. La première est directement liée à l'amplitude du bruit ; plus la composante aléatoire $\epsilon(t)$ a de poids vis à vis de la série temporelle, plus les états du système sont connus de manière diffuse. Les propriétés de variations du système tendent à s'estomper avec l'augmentation de la composante aléatoire. Le deuxième facteur est l'échantillonnage de la série temporelle. Un sous-échantillonnage ne permet plus de restituer correctement l'évolution dynamique du système : il y a erreur d'estimation du système. La différence entre l'amplitude du bruit et l'erreur de l'estimation est illustrée figure 6.12. L'amplitude du bruit est reliée à l'épaisseur de la distribution des points.

L'erreur de l'estimation est associée au degré d'irrégularité de la série temporelle. Sur la figure 6.12.a l'amplitude du bruit est grande alors qu'elle est faible figure 6.12.b. Cependant l'erreur de l'estimation peut être plus importante dans le cas b) que dans le cas a). En effet la quantité d'information et la résolution (l'échantillonnage) de la série temporelle peuvent permettre de compenser une amplitude importante de bruit à l'aide d'une technique de lissage.



(a) Grande amplitude de bruit d'une série temporelle sur-échantillonnée à $1000Hz$ et lissée ($f_c = 2Hz$) : l'estimation possède une bonne régularité

(b) Faible amplitude de bruit d'une série temporelle sous-échantillonnée à $10Hz$ et lissée ($f_c = 2Hz$) : la série estimée ne possède pas les propriétés de régularité requise

FIG. 6.12 – Distinction entre amplitude du bruit et erreur de l'estimation d'une série temporelle.

6.4.2 La quantité d'information

Le taux d'information extrait de l'attracteur original par l'intermédiaire de la série scalaire temporelle utilisée par notre méthode de reconstruction est estimé par le nombre N_q de points retenus pour l'approximation de la fonction standard sur la base de polynômes multivariés. A ce taux d'information est associé le degré d'instabilité de l'attracteur reconstruit. Nous avons observé qu'augmenter le nombre N_q de points est équivalent à augmenter les fluctuations dues au bruit de la trajectoire et, par conséquent, à accroître la probabilité de visite de zones non visitées par le système original. Ainsi une reconstruction pilotée par $(5 \cdot 10^{-4}, 80, 10, 10, 28, 1.33)$ génère un cycle limite de période 6 codé par la séquence (100101) (Fig. 6.13) où la syllabe 00 est présente alors qu'elle ne l'est pas sur l'attracteur original (voir le tableau 2.1 au chapitre 2).

Augmenter le nombre de points N_q à 90 permet de récupérer une structure chaotique lacunaire (Fig. 6.14.a). La distribution de probabilité de visite d'un point de coordonnée x de la section de Poincaré révèle une trajectoire fortement confinée au voisinage d'un cycle limite de période 3 (3 pics) (Fig. 6.14.b). Il semble que la population d'orbites périodiques soit fortement élaguée au delà du voisinage de ce cycle limite. Pousser le taux d'information à $N_q = 105$, permet la reconstruction d'un attracteur chaotique moins lacunaire (Fig. 6.14.c) pourvu d'une

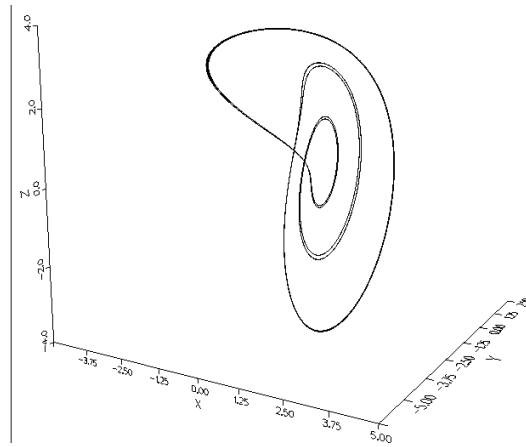


FIG. 6.13 – Cycle limite de période 6 codé par la séquence (100101) issu d’une reconstruction pilotée par le vecteur $(5.10^{-4}, 80, 10, 10, 28, 1.33)$.

application de premier retour relativement uniforme (Fig. 6.15.d). Elle est toutefois légèrement plus développée que sur l’attracteur original (Fig. 6.1.b). Nous pouvons déjà constater que l’augmentation du nombre de points N_q est associée à une augmentation de la population d’orbites périodiques instables de l’attracteur.

Suivant le taux d’information, nous observons alternativement des fenêtres chaotiques et des fenêtres périodiques. Ainsi, le nombre N_q de points retenus peut être assimilé à un paramètre de contrôle et une action sur lui peut permettre de retrouver différents comportements observables sur une ligne de l’espace des paramètres. Ainsi, le cycle limite de période 3 ($N_q = 200$, Fig. 6.15.a) se situe entre deux fenêtres chaotiques ($N_q = 105$, Fig. 6.14.c) et ($N_q = 400$, Fig. 6.15.b) à l’image de sa situation sur un diagramme de bifurcation. La robustesse d’une telle reconstruction à partir d’une série temporelle bruitée semble donc associée à la largeur de la fenêtre de l’espace des paramètres correspondant à l’attracteur original.

Dans certains cas, de très faibles variations du taux d’information peuvent induire des modifications non négligeables. Ainsi, pour un vecteur de pilotage $(10^{-3}, N_q, 10, 10, 28, 5)$ passer le taux d’information de 96 à 100 provoque l’apparition d’une troisième lettre sur l’attracteur (Fig. 6.16).

Le taux d’information sur l’attracteur original (nombre de points N_q retenus pour l’approximation de la fonction standard) devra être augmenté si l’ensemble attracteur est un cycle limite et diminué si l’application de premier retour de l’attracteur reconstruit est plus développée que sur l’application originale. Il existe des situations où le taux d’information n’est pas un paramètre suffisant pour récupérer la structure souhaitée. D’autres paramètres du vecteur pilote doivent alors être utilisés.

6.4.3 Influence de l’échantillonnage

L’échantillonnage peut être assimilé à l’étendue du voisinage sur lequel l’approximation linéaire se révèle efficace. Aussi, il pilote la configuration de l’espace tangent (défini par les dérivées temporelles) en un point. Rappelons qu’il existe une relation entre les décalages temporels et les dérivées : le paramètre τ dans la méthode des décalages joue le même rôle que l’échantillonnage δt dans notre méthode (voir chapitre 5). Il existe trois cas de figures :

- celui d’un sous-échantillonnage : le schéma aux différences finies prend en compte de l’information qui dépasse le cadre de l’approximation linéaire (Fig. 6.17.a). Il ne présente plus les propriétés de tangence requises pour une bonne description locale des dérivées. Il y a tendance à la décorrélation.
- celui d’un échantillonnage idéal : le schéma aux différences finies respecte le cadre de l’approximation linéaire. Dans ce cas, l’estimation des dérivées se réalise parfaitement. Une bonne connaissance de la dynamique est obtenue (Fig. 6.17.b).

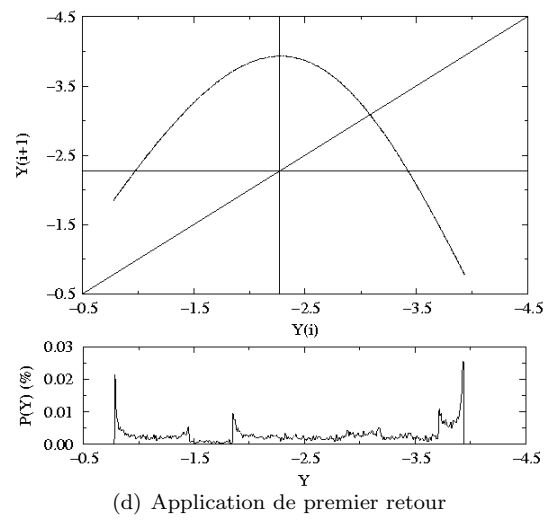
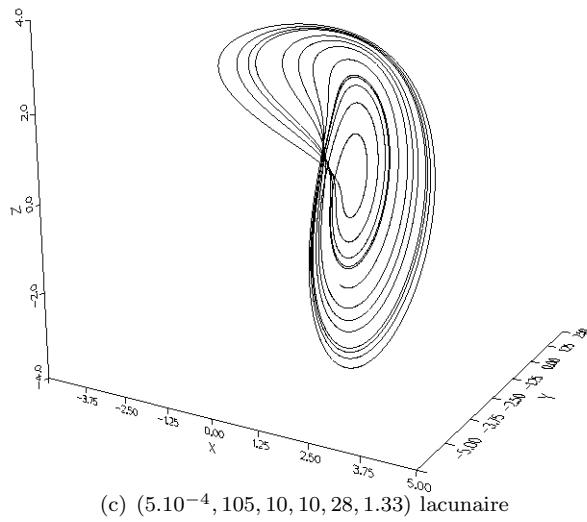
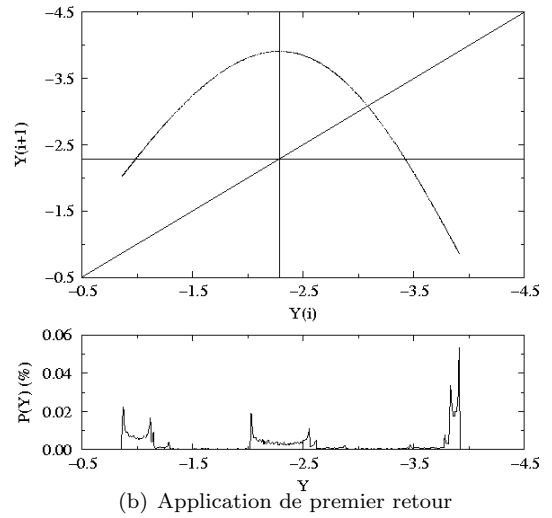
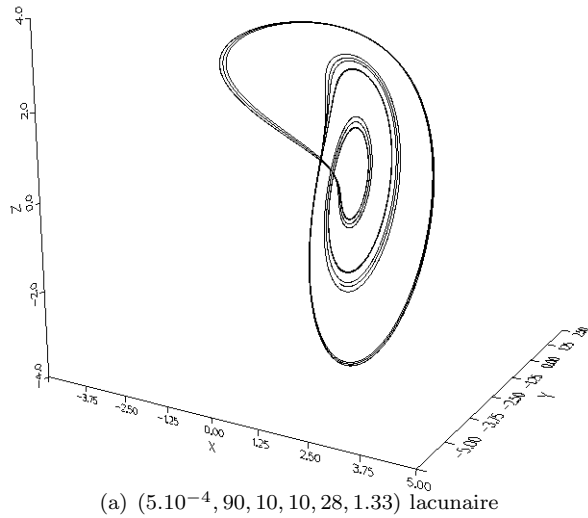
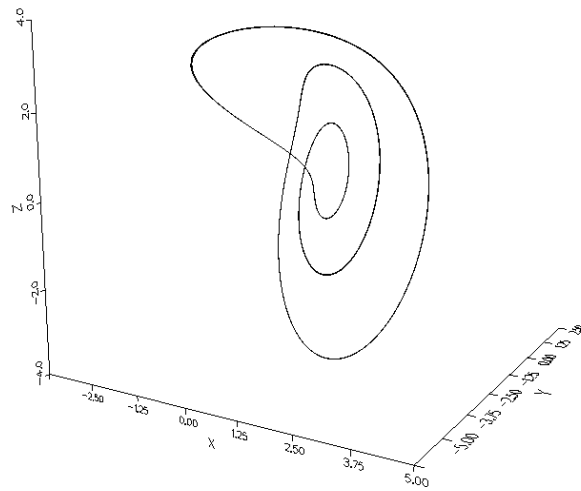
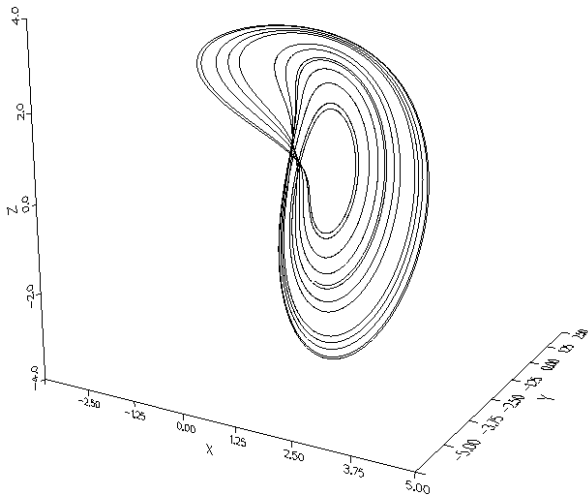
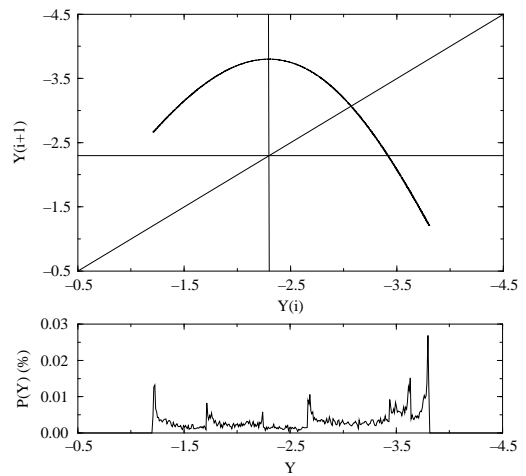
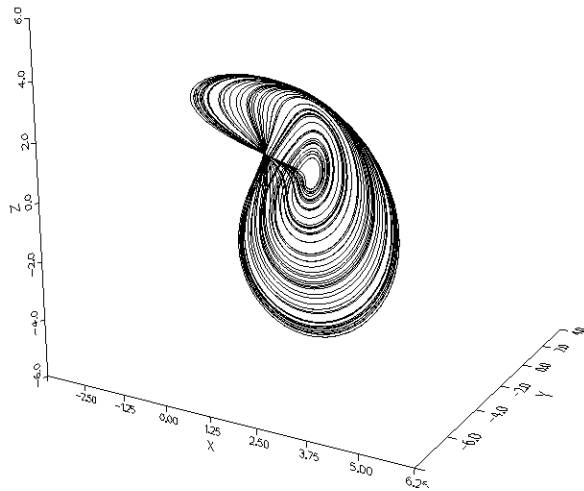


FIG. 6.14 – Influence sur le système reconstruit de la quantité d'information concernant le système original : augmentation de la population d'orbites périodiques.

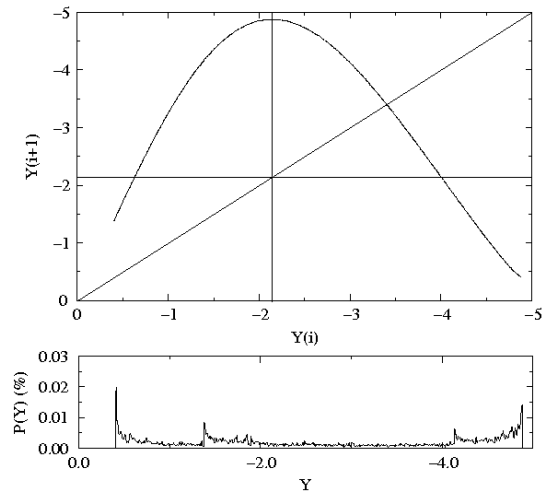
(a) Cycle limite de période 3 : $(5.10^{-4}, 200, 10, 10, 28, 1.33)$ (b) $(5.10^{-4}, 400, 10, 10, 28, 1.33)$ 

(c) Application de premier retour

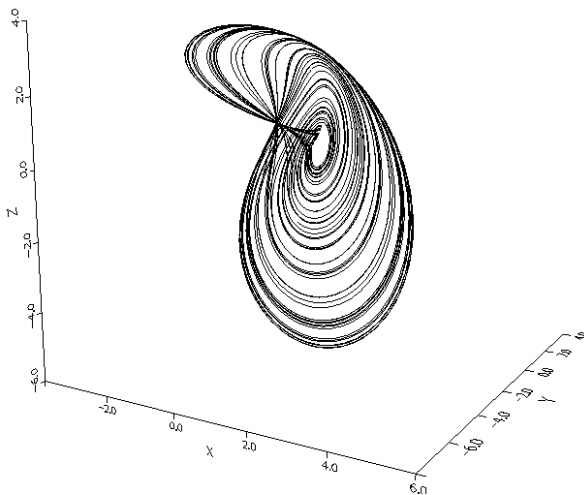
FIG. 6.15 – Influence de la quantité d'information concernant le système original sur le système reconstruit.



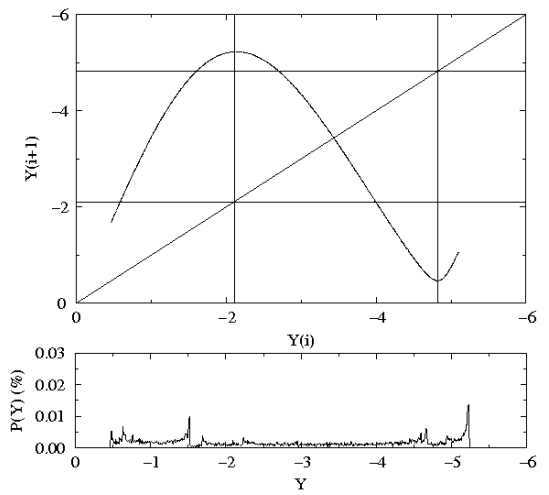
(a) Attracteur décrit par une dynamique symbolique à deux lettres : $(10^{-3}, 96, 10, 10, 50, 5)$



(b) Application de premier retour



(c) Attracteur décrit par une dynamique symbolique à trois lettres : $(10^{-3}, 100, 10, 10, 50, 5)$



(d) Application de premier retour

FIG. 6.16 – Influence de la quantité d'information concernant le système original sur le système reconstruit : apparition de lettres supplémentaires dans la dynamique symbolique.

- celui d'un sur-échantillonnage : le schéma aux différences finies est restreint à un voisinage tel que les variations de la série ne sont plus correctement perçues. Il y a tendance à la linéarité (Fig. 6.17.c).

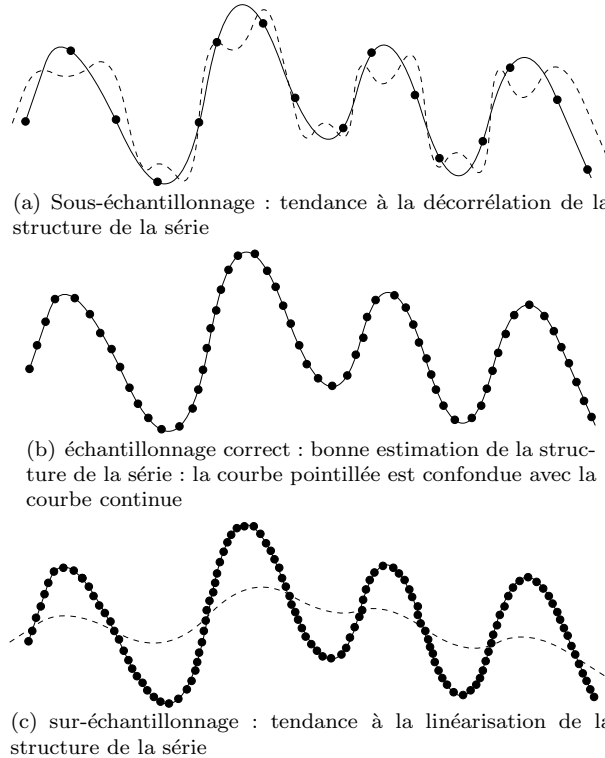


FIG. 6.17 – Influence de l'échantillonnage de la série sur l'estimation de ses dérivées. La courbe pointillée est une représentation schématique de l'information différentielle contenue dans une série suivant son échantillonnage. Un sous-échantillonnage ne permet pas d'obtenir une bonne continuité sur la série des dérivées (Z dans le système standard) et a tendance à compliquer la structure de la série. Le sur-échantillonnage atténue les gradients et a tendance à linéariser la structure de la série. Lorsque l'échantillonnage est correct, la connaissance de la série temporelle est "parfaite".

Ainsi, un sur-échantillonnage (petit pas de temps) est l'équivalent d'un décalage trop faible lors d'une reconstruction par décalage temporel : la dynamique est simplifiée. Nous retrouvons ici les résultats classiques de l'influence du décalage temporel sur la qualité de la reconstruction (section 5.2.1). Ainsi, le sous-échantillonnage (décalage trop grand) produit une décorrélation et le sur-échantillonnage (décalage trop petit) une linéarisation du comportement dynamique. L'équivalence des différents systèmes de coordonnées se retrouve ici. Pour le vecteur pilote $(3.510^{-5}, 10, 10, 10, 0, 0)$, seul un cycle limite de période 2 est reconstruit (Fig. 6.18).

Tout se passe comme si le paramètre de contrôle a avait été abaissé de manière à ce qu'il soit contenu dans l'intervalle $a \in [0.34\dots, 0.36\dots]$ (plage d'existence du cycle limite de période 2 de la cascade de doublements de période. Dans le cas d'un sous-échantillonnage, équivalent à de grands décalages, la dynamique a tendance à être décorrélée. Pour un pas de temps δt égal à $5.9 \cdot 10^{-2}$, c'est maintenant un cycle limite de période 3 qui est reconstruit (Fig. 6.19).

Tout se passe comme si le paramètre de contrôle a avait été augmenté jusqu'au voisinage de $a \approx 0.420$ (fenêtre du cycle limite de période 3). Le sous-échantillonnage a tendance à correspondre à une augmentation du paramètre de contrôle a . Toutefois ceci n'est qu'une tendance car on peut également observer des comportements associés à des diminutions du paramètre a :

- $\delta t = 5.994 \cdot 10^{-2} s$: cycle limite de période 4
- $\delta t = 5.995 \cdot 10^{-2} s$: chaos assez proche d'une dynamique symbolique binaire complète (voir Fig. 6.20)
- $\delta t = 5.997 \cdot 10^{-2} s$: cycle limite de période 1.

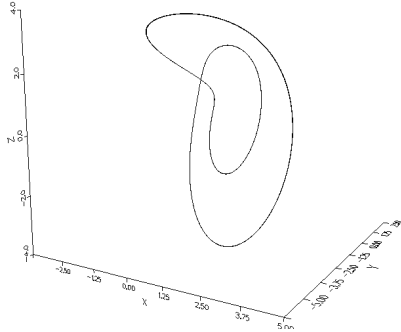


FIG. 6.18 – Simplification de la dynamique par pas de temps trop faible : seul un cycle limite de période 2 est reconstruit.

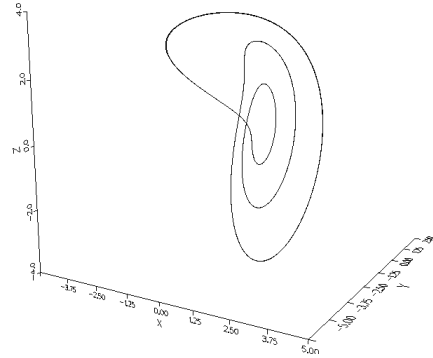
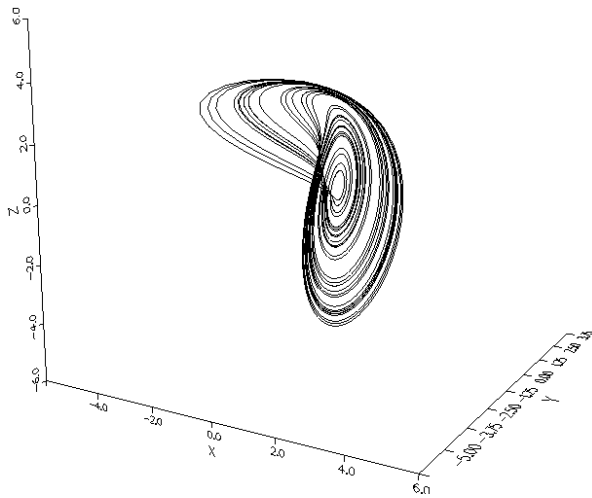
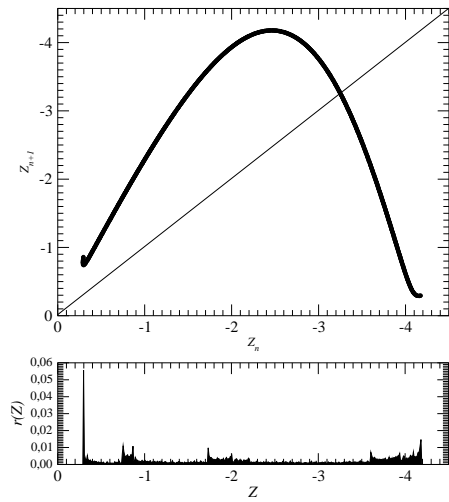


FIG. 6.19 – Développement de la dynamique par un pas de temps trop grand : un cycle limite de période 3 est reconstruit (la fenêtre de période 3 intervient pour $a \approx 0.420$, c'est à dire après le chaos observé pour $a = 0.398$: la "dynamique s'est donc développée).

Ainsi près de la divergence à l'infini (pour $\delta t = 6 \cdot 10^{-2}s$), l'estimation de la dynamique ne se réalise plus très bien et une oscillation entre une simplification et une complexification est observée.



(a) Attracteur reconstruit sous le vecteur pilote $(5.995 \cdot 10^{-2}, 10, 10, 10, 0, 0)$



(b) Application de premier retour

FIG. 6.20 – Influence de l'échantillonnage sur la dynamique du système reconstruit.

L'échantillonnage se révèle donc être, lui aussi, un paramètre pouvant être assimilé à un paramètre de contrôle. Bien que disposant d'une plage d'évolution plus faible, il se comporte de manière analogue au lissage lorsqu'il est trop important et au bruit lorsqu'il est trop faible. Dans le cas du système de Rössler, un échantillonnage correct se situe approximativement entre $5 \cdot 10^{-5}$ et 10^{-2} (la divergence apparaît lorsque $\delta t < 3.5 \cdot 10^{-5}s$ et $\delta t > 5.6 \cdot 10^{-2}s$). La plage de variation de ce paramètre est réduite car, très vite, les limites informatiques (temps de calcul trop long) et électroniques (limites de la chaîne d'acquisition au sein d'une expérience) se font sentir.

6.5 Nombre de coefficients

Une augmentation du nombre de coefficients influence la reconstruction. Ajouter des éléments à la base de polynômes utilisée lors de l'approximation revient à offrir des degrés de liberté supplémentaires au système. Ces degrés sont sans influence lors d'une reconstruction à partir d'une série dépourvue de toute fluctuation (particulièrement dans le cas où la fonction standard exacte est un polynôme multivariable non-linéaire) car la série temporelle ne contient qu'un nombre très limité de degrés de liberté. Il en est tout autrement lorsque la série est bruitée. En effet, le bruit a tendance à augmenter la dimension d'un système [14]. Ainsi, de nombreux termes sont offerts à l'approximation de la fonction standard exacte ; la solution "s'étale" sur toute la base (Fig. 6.21 b) et non plus sur une dizaine de coefficients correspondant aux termes de degrés les plus faibles (Fig. 6.21 a).

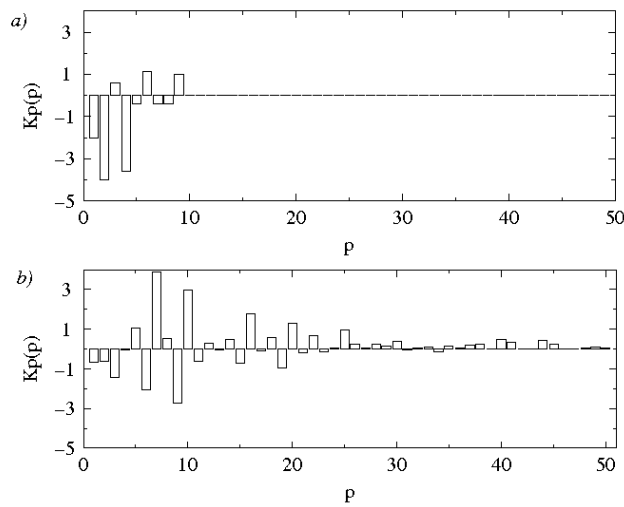


FIG. 6.21 – Spectre de coefficients correspondant à une reconstruction à partir d'une série a) exempte de bruit et b) perturbée avec un rapport bruit/signal de l'ordre de 28 dB.

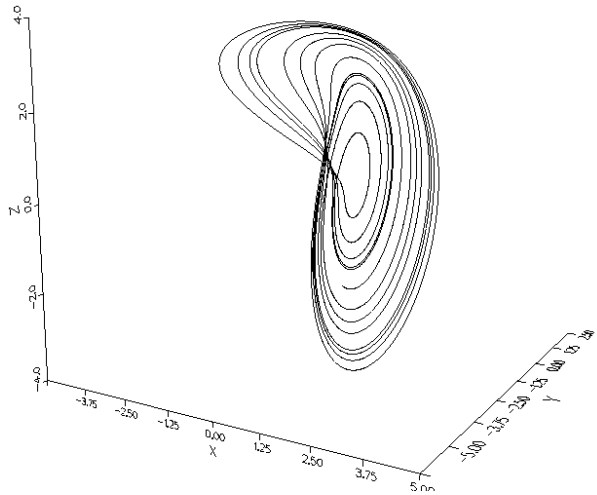
Si la base de polynômes multivariables construite pour l'approximation de la fonction standard exacte offre un critère de convergence dans le cas de séries non bruitées [4], il n'existe plus aucune propriété de ce genre lorsqu'une série perturbée est utilisée. J. L. Breeden et A. Hübler [30] affirment qu'il n'existe aucune garantie quant à la convergence d'une reconstruction d'un attracteur à partir de signaux bruités (c'est à dire de toute série expérimentale) et que le théorème de Takens ne s'applique plus dans ce cas. D'autre part leur méthode de reconstruction des variables cachées ne peut plus distinguer la meilleure solution en présence d'un bruit suffisamment élevé (rapport signal/bruit inférieur à 56 dB). Ils expliquent ceci de la manière suivante :

La sensibilité croissante de notre méthode au bruit est due au fait que le bruitage d'une dynamique augmente l'information disponible et produit une dynamique dont le portrait dans l'espace des phases est de dimension supérieure ; il y a donc une perte d'information.

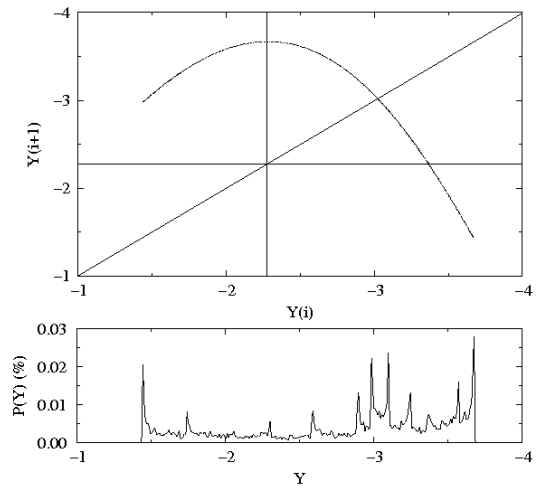
L'information sur la dynamique est donc estompée par l'information relative au bruit. Des résultats analogues ont été observés par G. Rowlands et J. C. Sprott [31].

Toutefois, une reconstruction d'un ensemble attracteur chaotique a été obtenue pour un vecteur pilote $(8.10^{-4}, 600, 10, 30, 28, 1.05)$. L'application de premier retour offre quelques lacunes qui se retrouvent sur la densité invariante $\rho(Z)$ qui présente de nombreux pics, signature de l'influence très forte d'une orbite périodique (Fig. 6.22.b). Par rapport à l'attracteur original, les pics de la distribution sont plus accentués sur cette reconstruction. Le spectre de coefficients offre un certain étalement.

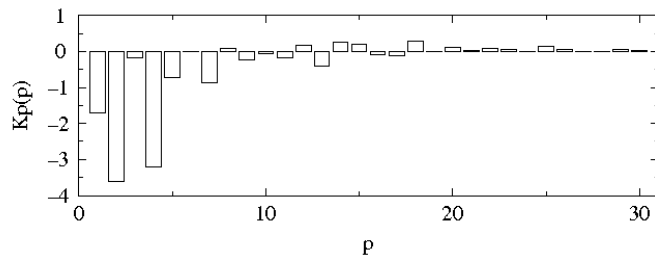
Poursuivre l'augmentation du nombre de K_p entraîne la perte du caractère fractal de l'ensemble attracteur. Un cycle limite de période 4 codé par la séquence (1011) (Fig. 6.23.a) est obtenu. Le spectre de coefficients est déjà relativement étalé (Fig. 6.23.b). Au delà, aucun ensemble fractal ne peut être reconstruit.



(a) Attracteur reconstruit sous un vecteur pilote de $(8.10^{-4}, 600, 10, 30, 28, 1.05)$

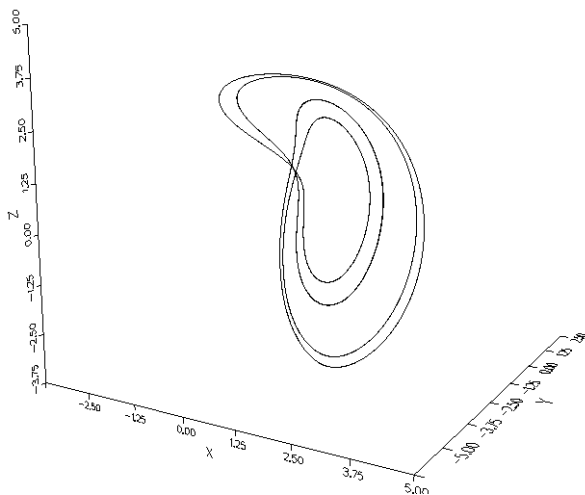


(b) Application de premier retour

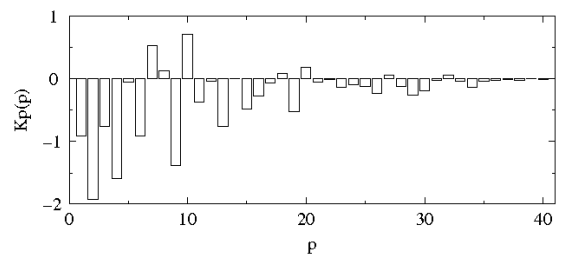


(c) Spectre de coefficients

FIG. 6.22 – Système standard reconstruit.



(a) Cycle limite de période 4 codé par la séquence (1011)



(b) Spectre de coefficients

FIG. 6.23 – Augmentation du nombre de K_p entrainant une réduction de la dynamique : un cycle limite de période 4.

6.6 Conclusion

La méthode de reconstruction utilisée permet l'obtention d'un champ de vecteurs reconstruit pour des rapports signal/bruit de l'ordre de 28 dB. L'ensemble des attracteurs reconstruits offre la particularité d'être facilement identifiable. C'est un des grands avantages de la méthode utilisée qui permet une caractérisation topologique aisée. Aussi, malgré les modifications de l'espace des paramètres qui peuvent survenir, une connaissance très précise sur le système peut être obtenue ; elle peut ne pas correspondre tout à fait au régime étudié mais est généralement relative à un comportement observé dans l'espace des paramètres original. Les cycles limites observés correspondent tous à des cycles limites du système original.

Le niveau de bruit atteint est relativement confortable et laisse envisager l'application expérimentale. Toutefois, la perte de robustesse des reconstructions obtenues se révèle être un handicap dans la mesure où la plupart des composantes du vecteur pilote se comportent comme des paramètres de contrôle vis à vis du système. Ainsi, l'unicité de la reconstruction est perdue et aucune certitude n'existe quant à la fidélité de celle-ci.

La technique de lissage utilisée est peu sophistiquée et une amélioration de ce côté devrait permettre un regain de robustesse de la méthode. Le grand nombre de paramètres du vecteur pilote permet d'approcher une reconstruction quasi-parfaite. Cependant une telle reconstruction, si elle existe, peu demander un grand nombre d'essais (du fait des multiples combinaisons possibles entre les paramètres). Une robustesse accrue rendrait la situation plus confortable et ouvrirait les portes vers un processus automatique de reconstruction. A l'instar de la méthode des décalages temporels pour laquelle le choix du décalage τ a offert une littérature prolifique, la méthode des dérivées temporelles pose, elle aussi, le problème du choix des paramètres de reconstruction. Si dans le cas du système de Rössler, une validation peut être réalisée sans ambiguïté, la reconstruction de portraits de phases de systèmes expérimentaux laissera le problème relativement ouvert.

Des travaux récents permettent une détermination des paramètres de reconstruction par l'utilisation de fonctions d'estimation d'erreurs [32, 33]. D'autre part, l'utilisation d'une base de polynômes de Legendre pour l'estimation des dérivées devrait permettre une amélioration de la robustesse face au bruit.

Bibliographie

- [1] **F. Takens.** Detecting Strange Attractors in Turbulence, in : *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, eds. D. A. Rand and L. S. Young, pub. Springer-Verlag, New York, pp. 366-381, 1981.
- [2] **M. Casdagli, S. Eubank, J. D. Farmer, J. Gibson.** State Space Reconstruction with Noise, *Physica D*, 51, pp. 52-98, 1991.
- [3] **O. E. RöSSLer.** An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters*, 57A (5), pp.397-398, 1976.
- [4] **G. Gouesbet, C. Letellier.** Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets. submitted to *Physical Review E*.
- [5] **E. Ott.** *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, 1993.
- [6] **P. Cvitanović.** Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and Quantum Chaos, *Physica D*, 51, pp. 138-151, 1991.
- [7] **J. Theiler, B. Galdrikian, A. Logtin, S. Eubank, J. D. Farmer.** *Detecting nonlinear structure in time series*, Proceedings of the First Experimental Chaos Conference, Arlington, Virginia, 1991.
- [8] **W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling.** *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [9] **J. D. Farmer, J. P. Crutchfield, H. Fröeling, N. H. Packard, R. S. Shaw.** Power Spectra and Mixing properties of Strange Attractors. *Annals N. Y. Academy of Sciences*, 357, pp. 453-472, 1980.
- [10] **C. Letellier, P. Dutertre, B. Maheu.** Unstable periodic orbits and templates of the RöSSLer system : toward a systematic topological characterization, soumis à *Chaos*.
- [11] **J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, R. S. Shaw.** Le chaos. *Pour la Science*, pp.26-39, Février 1989.
- [12] **J. P. Crutchfield, J. D. Farmer.** Fluctuations and simple chaotic dynamics. *Physics Report*, 92 (2), pp. 45-82, 1982.
- [13] **S. J. Ling, M. Lücke.** Effect of additive and multiplicative noise on the bifurcation of the logistic model. *Physical Review A*, 33 (4), pp. 2694-2703, 1986.
- [14] **E. Ott, E. D. et J. A. Yorke.** A scaling law : How an attractor's volume depends on noise level. *Physica D*, 16, pp. 62-78, 1985.
- [15] **R. Vautard, P. Yiou, M. Ghil.** Singular Spectrum analysis : a toolkit for short, noisy chaotic signal, *Physica D*, 58, pp. 95-126, 1992.
- [16] **T. Sauer.** A noise reduction method for signals from nonlinear systems, *Physica D*, 58, pp. 193-201, 1992.
- [17] **D. S. Broomhead, G. P. King.** Extracting qualitative dynamics from experimental data, *Physica D*, 20, pp. 217- , 1987.
- [18] **P. Grassberger, R. Hegger, H. Kantz, C. Schaffrath, T. Schreiber.** On noise reduction methods for chaotic data, *Chaos*, 3 (2), pp. 127-141, 1993.
- [19] **T. Schreiber, P. Grassberger.** A simple noise reduction method for real data, *Physics Letters A*, 160, pp. 411-418, 1991.

- [20] **A. I. Mees, K. Judd.** Dangers of geometric filtering, *Physica D*, 68, pp. 427-436, 1993.
- [21] **W. F. Lawkins, C. S. Daw, D. J. Downing, N. E. Clapp.** Role of low-pass filtering in the process of attractor reconstruction from experiemtal chaotic time series, *Physical Review E*, 47 (4), pp. 2520-2534, 1993.
- [22] **A. K. Agarwal, D. P. Ahalpara, P. K. Kaw, H. R. Prablakera, A. Sen.** Model equations from a chaotic time series, *Journal of Physics*, 35(3), pp.287-301, 1990.
- [23] **M. Paluš, I. Dvořák.** Singular-value Decomposition in Attractor Reconstruction Pitfalls and Precautions, *Physica D*, 55, pp. 221-234, 1992.
- [24] **R. Badii, G. Broggi, B. Derighette, M. Ravani.** Dimension increase in filtered chaotic signals, *Physical Review Letters*, 60 (11), pp. 979-982, 1988.
- [25] **A. M. Fraser.** Reconstructing Attractors from scalar time series : A Comparison of Singular System and Redundancy criteria, *Physica D*, 34, pp. 391-404, 1989.
- [26] **J.F.Gibson, J. D. Farmer, M. Casdagli, S. Eubank.** An Analytic Approach to Pratical State Space Reconstruction, *Physica D*, 57, pp. 1-30, 1992.
- [27] **N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw.** Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, 45 (9), pp.712-716, 1980.
- [28] **G. Gouesbet.** Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series, *Physical Review A*, 43 (10), pp. 5321-5331, 1991.
- [29] **G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, X. J. Hou.** Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski, *Journal of Nonlinear Sciences*, 1, pp. 147-173, 1991.
- [30] **J. L. Breeden, A. Hübler.** Reconstructing Equations of motion from Experiemental Data with Hidden Variables. *Physical Review A*, 42 (10), pp. 5817-5826, 1990.
- [31] **G. Rowland, J. C. Sprott.** Dynamical Equations from chaotic data, *Physica D*, 58, pp. 251-259, 1993.
- [32] **R. Brown, N. F. Rulkov, E. R. Tracy.** Modeling time series data and synchronizing chaotic systems, preprint, 1993.
- [33] **L. Le Sceller.** communication privée.

Troisième partie

**Applications à des systèmes
expérimentaux**

Chapitre 7

Topologie de systèmes physiques

7.1 Introduction

Nous l'avons vu dans la première partie, un attracteur étrange se construit sur un squelette d'orbites périodiques instables [1]. Il a été montré au début de ce mémoire que les propriétés topologiques de ces orbites périodiques caractérisaient des classes de comportements dynamiques. Ces classifications, parce qu'elles sont basées sur des invariants topologiques sont persistentes lorsque les paramètres de contrôle du système sont changés. Ainsi lorsque le comportement dynamique passe d'un cycle limite à un comportement quasipériodique et/ou au chaos, la classification par les nombres de liaisons (des entiers) reste la même dès lors que les couples d'orbites périodiques considérées ne sont pas impliqués dans une bifurcation (par contre une seule orbite de la paire considérée peut être impliquée dans une bifurcation). Les propriétés topologiques sont donc plus robustes à toute perturbation du système que les propriétés géométriques (dimensions, exposants de Lyapunov, ...) qui dépendent des paramètres de contrôle.

De ce fait, si nous sommes capables d'extraire ces invariants topologiques des mesures expérimentales, ils peuvent être utilisés pour valider un modèle ou définir des classes d'équivalence de comportement dynamique. La caractérisation topologique se révèle alors un outil crucial pour la sélection des champs de vecteurs qui peuvent décrire les observations. Elle se révèle donc être très complémentaire des techniques de reconstruction globale.

La caractérisation topologique nécessite l'utilisation d'un espace reconstruit tridimensionnel. Pour cela, la très populaire méthode des décalages peut être utilisée. Comme nous le verrons au cours de ce chapitre des changements de variables plus sophistiqués peuvent être utilisés afin d'obtenir un portrait de phase bien développé. Par "bien développé", nous entendons qu'en chaque région de l'attracteur, les portions de trajectoire se développent sur une variété bien étendue. Ainsi, l'introduction d'un changement de variable sert à "déplier" les orbites périodiques de manière à faciliter l'étude topologique.

La caractérisation topologique est plutôt robuste face à la contamination du bruit puisque ce dernier commence par détruire les orbites de hautes périodes et que seules les orbites de faibles périodes sont nécessaires et suffisantes à la caractérisation. Ainsi, G. B. Mindlin *et al* [2] montrent que, malgré un niveau de bruit de l'ordre de 60 % par rapport au signal, l'identification des orbites de faibles périodes est encore possible.

Nous verrons, au cours de ce chapitre, quelques applications de la caractérisation topologique à des systèmes physiques tels que des systèmes laser ou les réactions chimiques.

7.2 Les systèmes laser

Parmi les systèmes expérimentaux couramment étudiés avec les outils de la dynamique des systèmes, les lasers occupent une place de choix. Plusieurs types de laser sont étudiés : le laser CO₂ à fréquence modulée [3], le laser à résonance magnétique nucléaire (RMN) [4, 5] et le laser contenant un absorbant saturable [6]. Nous présenterons brièvement quelques résultats sur ces lasers.

7.2.1 Laser CO₂

Le laser CO₂ à modulation interne est connu pour présenter une cascade de doublements de période comme route vers le chaos [3]. En raison de la classe d'équivalence définie par la cascade de doublements de période [7]-[8], nous savons d'ores et déjà que l'attracteur chaotique généré par le laser CO₂ sera caractérisé par une application de premier retour à deux branches monotones : une croissante et une décroissante. Le patron caractéristique de l'attracteur sera alors constitué d'une bande de torsion locale paire et d'une bande de torsion locale impaire.

Le grandeur physique mesurée est l'intensité $I(t)$ du rayonnement émis. Toutefois, M. Lefranc et P. Glorieux [9] ont montré que ce n'était pas la variable la plus adaptée à la caractérisation de ce système. En effet, l'évolution temporelle de l'intensité du rayonnement émis présente de nombreuses séquences léthargiques, où l'intensité est très voisine de zéro. Les attracteurs reconstruits présentent alors des zones où les trajectoires sont très fortement confinées, rendant délicate l'étude des propriétés aussi bien topologiques que géométriques [9].

Ainsi à l'aide de l'algorithme de P. Grassberger et I. Procaccia [10], M. Lefranc et P. Glorieux ont montré que le logarithme de l'intensité, ou, expérimentalement, une fonction approchée fournie par un amplificateur logarithmique, permettait la reconstruction d'un attracteur plus homogène. De plus, ils notent que $\text{Log}I$ apparaît comme une variable naturelle au sein des équations décrivant leur système laser [9]. Ils utilisent alors la série temporelle $\text{Log}(I(t) + I_0)$, où I_0 est une très petite constante qui peut être ajustée pour obtenir un portrait de phase reconstruit par la méthode des décalages correctement déplié.

Comme leur système est périodiquement forcé, ils utilisent les coordonnées $\{X(t), X(t + \tau), \phi\}$, où $X(t) = \text{Log}(I(t) + I_0)$ et τ est un décalage temporel et $\phi = \omega t \text{ mod } 2\pi$ est la phase de la modulation extérieure. L'attracteur étrange ainsi obtenu est représenté Fig. 7.1.a (d'après [9]).

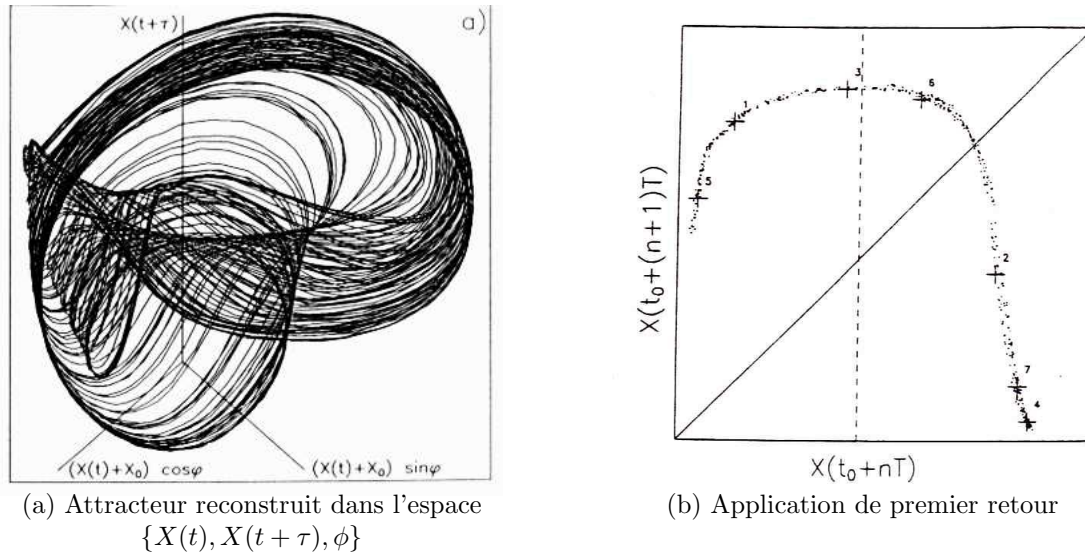


FIG. 7.1 – Comportement du laser CO₂ forcé à 382.5 kHz. La présence de deux branches monotones (une croissante et une décroissante) implique un patron à deux bandes (une paire et une impaire).

Ils obtiennent une application de premier retour (Fig. 7.1.b), similaire à celle obtenue pour le système de Rössler (chapitre 2), caractéristique de la cascade de doublements de période. Ils proposent le patron (représenté Fig. 7.2) défini par la matrice de liaisons suivante :

$$M_{\text{CO}_2} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Ce patron est validé par le calcul du nombre de liaisons obtenu sur une projection des orbites périodiques sur le plan $(t/T_0 \text{ mod } 1, X(t))$ où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période de forçage (Fig. 7.3).

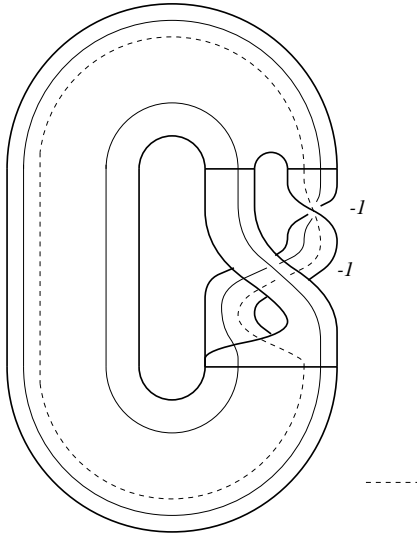


FIG. 7.2 – Patron représentatif de l'attracteur généré par le laser CO_2 forcé à 382.5 kHz. La paire d'orbites périodiques (1,10) est construite sur le patron : $L(1, 10) = -1$.

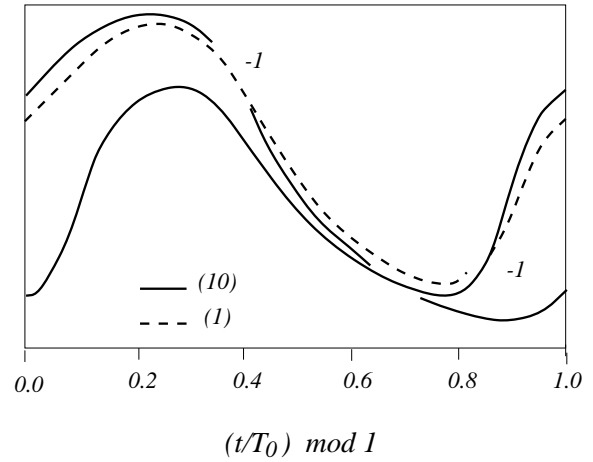


FIG. 7.3 – Projection de la paire d'orbites périodiques (1,10) sur le plan $(t/T_0 \bmod 1, X(t))$. Le nombre de liaisons $L(1, 10)$ est égal à -1 . Le patron est validé. L'attracteur est donc associé à une dynamique type "Rössler à deux bandes".

7.2.2 Laser RMN

L'activité laser RMN est fournie par le spin nucléaire de l'aluminium ^{27}Al dans un cristal de rubis placé à la température de 2.4 K au sein d'un champ magnétique B_0 d'amplitude 1.1 Tesla . La magnétisation nucléaire totale $M = (M_x, M_y, M_z)$ précesse à la fréquence $\nu_a = 12.3\text{ MHz}$. L'inversion de la population est obtenue à l'aide d'une pompe micro-onde et la résonance par confinement de l'activité dans une cavité. L'intensité du rayonnement est proportionnelle à l'amplitude de la magnétisation nucléaire transverse $M_T = (M_x^2 + M_y^2)^{1/2}$.

Le modèle étendu de Bloch-Birkoff décrit correctement les observations expérimentales. Il s'écrit [5] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma \left[y - \frac{x}{f(\tau)} \right] \\ \dot{y} = Rx - y(1 + ay) - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (7.2)$$

où x est proportionnel au champ magnétique transverse B_T , y à la magnétisation longitudinale M_z et z à la magnétisation de la pompe M_e . Les paramètres de contrôle $(R, \sigma, b) = (4.875, 1.807, 2.10^{-4})$ dépendent de variables physiques. La fonction $f(\tau) = 1 + A \cos(\omega\tau)$ décrit la modulation à la fréquence $\omega \in [0.014, 0.034]$ et τ est un temps normalisé. Le système d'équations (7.2) se réduit au système de Lorenz [11] lorsque $a = A = 0$. Sous ces conditions, l'attracteur asymptotique est le point fixe de coordonnées

$$\begin{cases} x = \sqrt{b(R-1)} \\ y = \sqrt{b(R-1)} \\ z = R-1 \end{cases} \quad (7.3)$$

La brisure de symétrie induite par l'adjonction du terme ay implique que seul un point fixe est obtenu (au lieu de deux pour le système de Lorenz).

La différence entre ce modèle et le modèle conventionnel de Bloch-Birkoff consiste en la présence du terme $-ay^2$, où $a \approx 0.261$ décrit un amortissement nonlinéaire de la magnétisation transverse y . La nécessité de ce

terme a été montrée par L. Flepp *et al* [5] à l'aide d'une étude minutieuse des orbites périodiques dans l'espace des paramètres $\omega - A$. La confrontation de l'organisation des orbites périodiques de l'expérience avec celles du modèle a donc permis de peaufiner le modèle et de le valider.

N. B. Tufillaro *et al* [4] ont caractérisé topologiquement l'attracteur généré par ce système. L'extraction des orbites périodiques est réalisée à partir de l'enregistrement de la magnétisation transverse $M_T(t)$. Une projection d'une paire de ces orbites est donnée Fig. 7.4. L'application de premier retour permet de définir une partition et de coder ces deux orbites par les séquences respectives (1) et (10). Leur nombre de liaisons $L(1,10)$ est égal +1 (voir Fig. 7.4).

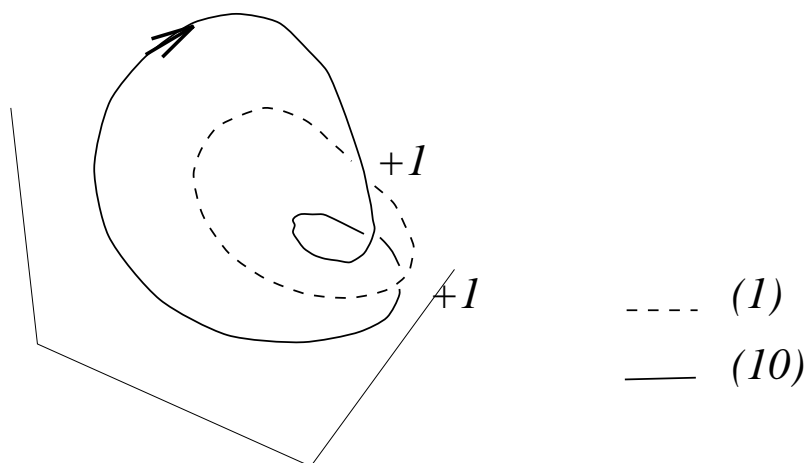


FIG. 7.4 – Projection de la paire d'orbites périodiques (1,10) extraite de l'attracteur généré par le laser RMN (d'après N. B. Tufillaro *et al*). Le nombre de liaisons $L(1,10)$ est égal à +1.

Le patron associé à un tel comportement est un simple patron à deux bandes du type "Rössler à deux bandes" (voir chapitre 2). Il est défini par la matrice de liaisons suivante :

$$M_{RMN} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

et est représenté avec les deux orbites périodiques (1) et (10) Fig. 7.5.

Une fois encore, la dynamique du laser RMN est compatible avec la dynamique type "Rössler à deux bandes". Les torsions sont ici positives alors qu'elles étaient négatives pour le laser CO_2 . Un résultat analogue a été obtenu par F. Pappoff *et al* [6] sur un laser CO_2 pourvu d'un absorbant saturable. Ainsi, l'ensemble des systèmes laser étudiés dans la littérature présente des patrons compatibles avec une dynamique du type "Rössler à deux bandes". Bien que les systèmes expérimentaux diffèrent, la dynamique est semblable, au moins quant à l'organisation des orbites périodiques contenues dans les attracteurs étudiés.

7.3 Les réactions chimiques

La compréhension des réactions chimiques se révèle être un enjeu important pour l'optimisation de la production de tout produit chimique. Au début des années 80, J. C. Roux et H. Swinney [12] ont montré la nature nonlinéaire des cinétiques chimiques dans des milieux homogènes. Ainsi, lorsqu'elles sont maintenues loin de l'équilibre, les réactions chimiques peuvent présenter un comportement chaotique cohérent [12]. La plus célèbre de ces réactions est la réaction de Belousov-Zhabotinskii qui offre la plupart des scénarii vers le chaos comme le doublement de période, les intermittences, les accrochages de fréquences, ... Une revue historique sur la réaction de Belousov-Zhabotinskii est donnée par A. Arnéodo *et al* [13].

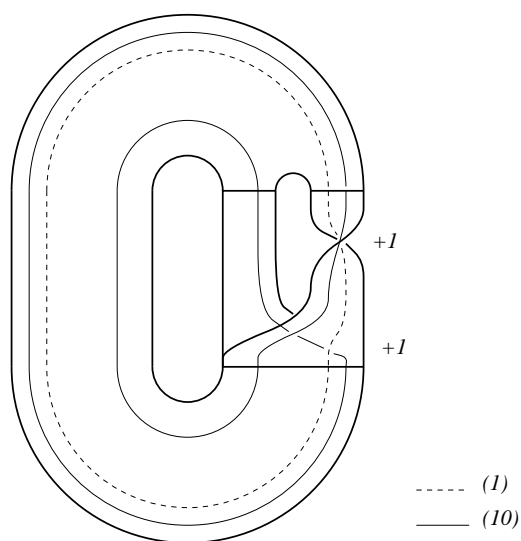
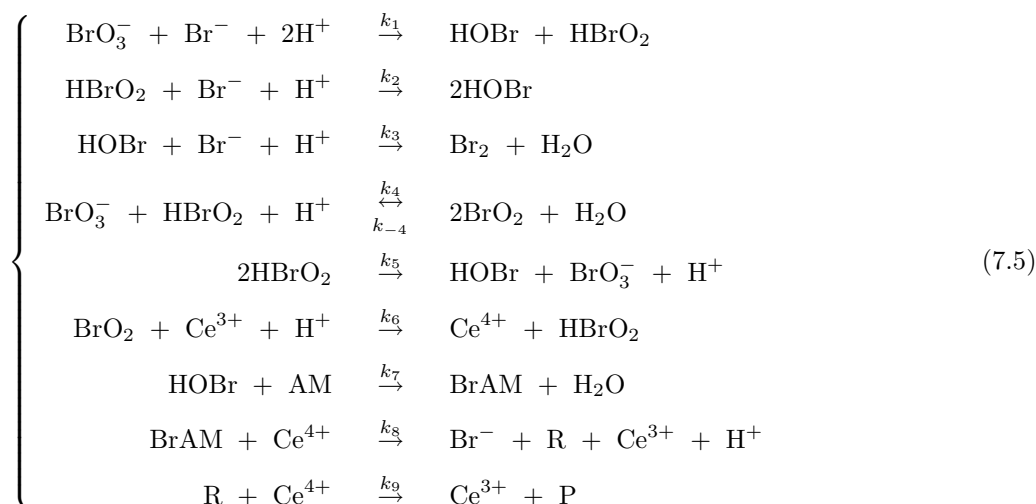


FIG. 7.5 – Patron associé au comportement du laser RMN. Le couple d'orbites périodiques (1,10) est construit : $L(1,10)=+1$. (d'après N. B. Tuffiaro *et al.*)

Cette réaction peut être décrite par le mécanisme réactionnel suivant [13] :



où

- AM est l'acide malonique
- BrAM l'acide bromomalonique
- R un dérivé oxydé de l'acide malonique

tandis que le brome et P ne sont pas pris en compte au sein de la cinétique. Suivant ce système, après une succession de réactions où le bromure est consommé, des réactions fournissent un processus de rétroaction dans la production de bromure quand le catalyseur métallique Ce, dans son état oxydé, réagit avec l'acide bromomalonique. Ce système est réduit en tenant compte du fait que les composants tels que le bromate, l'acide sulfurique, l'acide malonique et le catalyseur métallique Ce(III) sont en grande concentration qui varie peu. Ces concentrations sont alors prises constantes sans modifications des résultats [13].

Le système d'équations différentielles suivant est alors obtenu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -a_1x_1 - a_2x_1x_2 - a_3x_1x_3 + k_8x_5x_6 + k_0(x_1^0 - x_1) \\ \dot{x}_2 = a_1x_1 - a_2x_1x_2 - a_4x_2 + a_5x_4^2 - 2k_5x_2^2 + a_6x_4 - k_0x_2 \\ \dot{x}_3 = a_1x_1 + 2a_2x_1x_2 - a_3x_1x_3 + k_5x_2^2 + a_7x_3 - k_0x_3 \\ \dot{x}_4 = 2a_4x_2 - 2a_5x_4^2 - a_6x_4 - k_0x_4 \\ \dot{x}_5 = a_6x_4 - k_8x_5x_6 - k_9x_5x_6 - k_0x_5 \\ \dot{x}_6 = a_7x_3 - k_8x_5x_6 - k_0x_6 \\ \dot{x}_7 = k_8x_5x_6 - k_9x_5x_7 - k_0x_7 \end{array} \right. \quad (7.6)$$

où les variables x_i et les paramètres a_i sont reportés dans le tableau ci-dessous. Puisque la réaction est maintenue hors équilibre dans un réacteur ouvert, le terme $k_0x_i^0$ est ajouté au sein du système (7.6) ; il représente l'addition de l'espèce $[Br^-]$. Les termes $-k_0x_i$ représentent le flux des espèces sortant du réacteur. F. Argoul, A. Arnéodo et P. Richetti [14] ont utilisé ce système pour modéliser précisément un régime de la réaction de Belousov-Zhabotinskii observé par J. C. Roux,, R. H. Sinoyi et H. L. Swinney [15].

i	x_i	a_i
1	$[Br^-]$	$k_1 [BrO_3^-][H^+]^2$
2	$[HBrO_2]$	$k_2 [H^+]$
3	$[HOBr]$	$k_3 [H^+]$
4	$[BrO_2]$	$k_4 [BrO_3^- H^+]$
5	$[Ce^{4+}]$	$k_{-4} [H_2O]$
6	$[BrAM]$	$k_6 [Ce^{3+}][H^+]$
7	$[R]$	$k_7 [AM]$

La réaction de Belousov-Zhabotinskii est l'une des réactions chimiques les plus étudiées dans le contexte de la dynamique des systèmes nonlinéaires. Nous présenterons ici deux études : celle d'un chaos faiblement développé réalisée par G. B. Mindlin *et al* [2] et celle d'un chaos près d'une situation homocline menée par A. Arnéodo *et al* [13].

7.3.1 Un chaos faiblement développé

Nous avons vu que la réaction de Belousov-Zhabotinskii pouvait être modélisée par un système de 7 équations différentielles ordinaires. Malgré cela, nous allons construire un flot tridimensionnel à partir de l'évolution de l'une des grandeurs physiques du système. Les données étudiées par G. B. Mindlin *et al* [2] ont été obtenues par un groupe Texan et décrites par P. Richetti *et al* [16].

Afin de récupérer une projection du portrait de phase à partir de la série temporelle mesurée, une méthode de reconstruction doit être utilisée (voir partie II). Dans le cas présent, l'application d'une méthode de reconstruction par décalages temporels ou dérivées se révèle infructueuse car l'ensemble des intersections apparaît dans une très petite région de l'attracteur, ce qui rend difficile la caractérisation topologique. Afin d'obtenir une reconstruction plus adéquate, G. B. Mindlin *et al* [2] utilisent un système de coordonnées constitué de la

variable mesurée $x(i)$ et de deux filtres intrégrateurs. Il est de la forme

$$\begin{cases} X = \sum_{j=1}^i \left[x(j) e^{\frac{-(i-j)}{\tau}} \right] \\ Y = x(i) \\ Z = x(i) - x(i-1) \end{cases} \quad (7.7)$$

où τ est un décalage temporel.

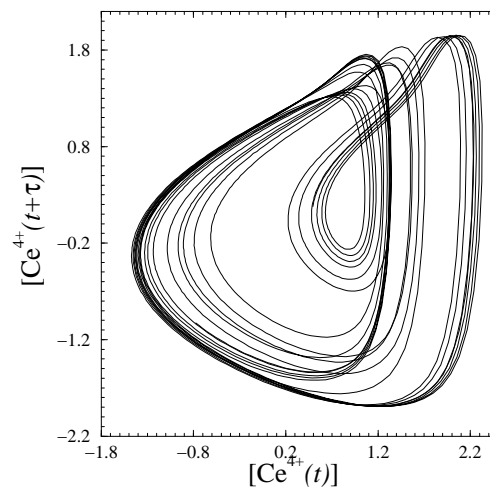


FIG. 7.6 – Projection dans le plan XY de l'attracteur reconstruit à partir de la mesure d'une grandeur physique de la réaction de Belousov-Zhabotinskii (d'après Mindlin *et al*).

Une projection dans le plan XY de l'attracteur reconstruit (Fig. 7.6) offre une bonne résolution des intersections et permet la caractérisation topologique. L'application de premier retour de cet attracteur présente deux branches monotones, une croissante et une décroissante [2]. En accord avec cela, le patron proposé par G. B. Mindlin *et al* est un simple patron constitué de deux bandes, une paire et une impaire. Ce patron est représenté Fig. 7.7. Il est caractérisé par la matrice de liaisons suivante :

$$M_{BZ} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Une projection de la paire d'orbites périodiques (10,101) est réalisée dans le plan XY (Fig. 7.8). Le nombre de liaisons $L(10,101)$ est identique à celui obtenu sur le patron : le patron est validé.

7.3.2 Un chaos un peu plus développé

F. Argoul, A. Arnéodo et P. Richetti [14] ont étudié la réaction de Belousov-Zhabotinskii sur un régime chaotique plus développé que celui étudié par G. B. Mindlin *et al*. Ils se sont intéressés au cas où le flot s'inscrit sur un attracteur étrange qui provient des interactions entre une bifurcation de Hopf surcritique et une bifurcation homocline globale. Dans ce cas, le théorème de Sil'nikov (présenté brièvement au chapitre 2) est applicable et garantit le chaos.

La réaction de Belousov-Zhabotinskii est étudiée par la mesure de la concentration en $[Ce^{4+}]$. L'évolution temporelle de la concentration $C(t)$ est représentée Fig. 7.9. Le portrait de phase est reconstruit par une méthode de décalage temporel. L'attracteur ainsi obtenu est reporté Fig. 7.10. Il est représenté dans le plan $C = C(t), C' = C(t + \tau), C'' = C(t + 2\tau)$ où τ est le décalage temporel égal à 12s.

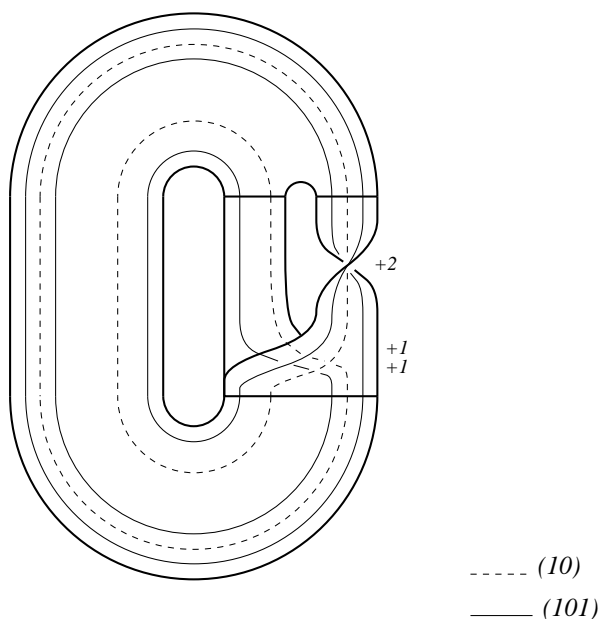


FIG. 7.7 - Patron de l'attracteur de la réaction de Belousov-Zhabotinskii. La paire d'orbites périodiques (10,101) est construite : $L(10,101)=+2$.

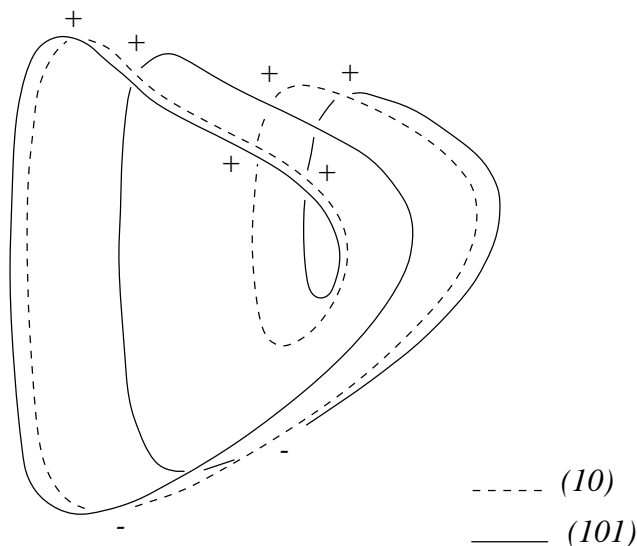


FIG. 7.8 - Projection des orbites périodiques (10) et (101) dans le plan XY. Le nombre de liaisons $L(10,101)$ est de +2.

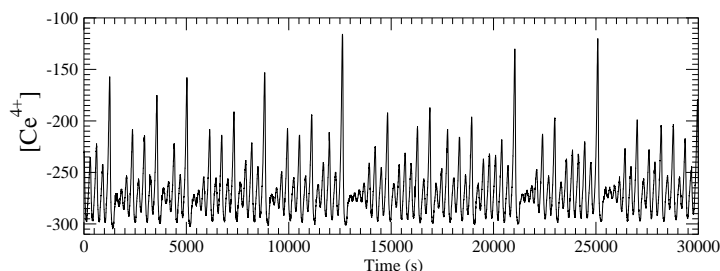


FIG. 7.9 - Evolution de la concentration en Ce^{4+} étudiée par F. Argoul et al.

Afin d'obtenir un modèle d'une interaction entre une bifurcation de Hopf et une bifurcation homocline, F. Argoul, A. Arnéodo et P. Richetti utilisent le système de trois équations différentielles ordinaires suivant [14] :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = -\eta Z - \nu Y - \mu X - k_1 X^2 - k_2 Y^2 - k_3 XY - k_4 XZ - k_5 X^2 Z \end{cases} \quad (7.9)$$

Ce système possède deux points fixes de coordonnées

$$F_0 \equiv \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F \equiv \begin{cases} -\frac{\mu}{k_1} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

L'origine présente une bifurcation de Hopf lorsque $\mu = \nu\eta$ pour η et ν positifs. Les paramètres de contrôle ont été choisis par F. Argoul, A. Arnéodo et P. Richetti de manière à ce qu'il existe une orbite biasymptotique à

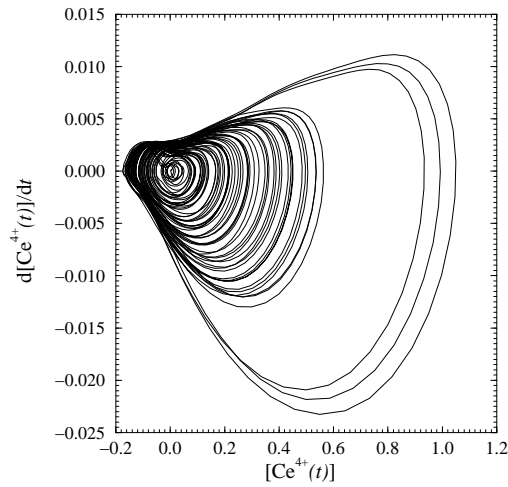


FIG. 7.10 – Attracteur reconstruit à partir de l'évolution de la concentration en Ce^{4+} étudiée par F. Argoul *et al.*

l'origine. Les paramètres retenus sont reportés dans le tableau 7.1. L'évolution temporelle de la variable $X(t)$ est représentée Fig. 7.11.

TAB. 7.1 – Coefficients du modèle de la réaction de Belousov-Zhabotinskii : les coefficients ont été choisis de manière à ce que le système présente une orbite biasymptotique à l'origine (d'après F. Argoul *et al.*).

η	ν	μ	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1	1.3	1.38	-1	1.425	0	-0.2	0.01

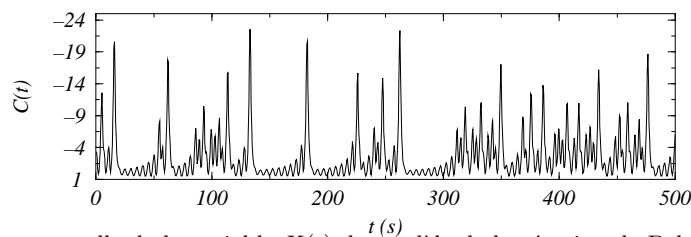


FIG. 7.11 – Evolution temporelle de la variable $X(t)$ du modèle de la réaction de Belousov-Zhabotinskii.

La série temporelle $X(t)$ peut être comparée très favorablement à celle de la concentration $C(t)$ en $[\text{Ce}^{4+}]$ (Fig. 7.11). Il en est de même pour l'attracteur généré par le modèle (7.9) représenté Fig. 7.12 dans le plan XY .

Afin de connaître un peu mieux cet attracteur, nous construisons une section de Poincaré P_0 (Fig. 7.13.a) définie par l'ensemble

$$P_0 \equiv \left\{ (X, Y \in \mathbb{R} \mid Y = 0, \frac{\partial \phi_0(X, Y, Z)}{\partial Y} > 0) \right\} \quad (7.10)$$

où ϕ_t est le flot associé au champ de vecteurs défini par le système (7.9). L'application de premier retour de la section de Poincaré P_0 à elle-même à l'aide de la variable $X(t)$ est représentée Fig. 7.13.b. Elle présente quatre branches monotones : une croissante et trois décroissantes. Le dédoublement des deux premières branches

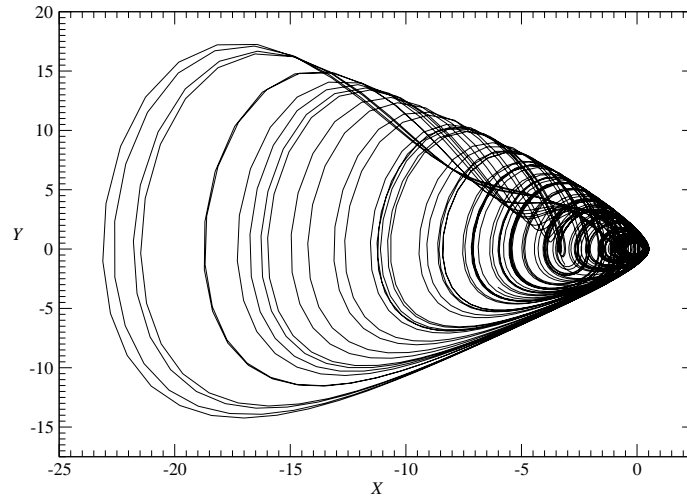
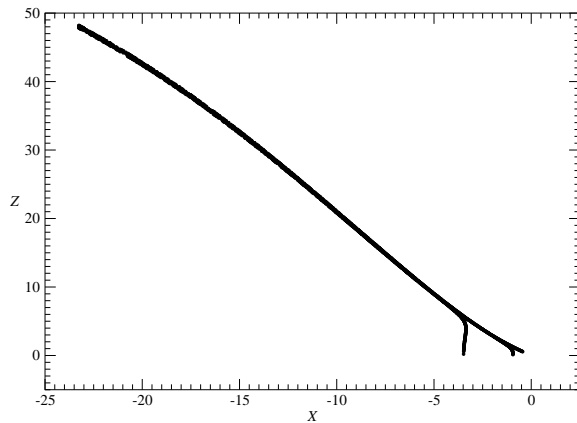
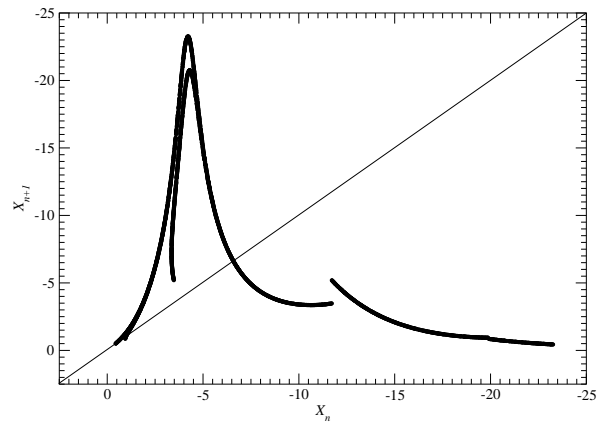


FIG. 7.12 – Attracteur produit par le modèle de la réaction de Belousov-Zhabotinski. Sa configuration est très semblable à celle de l'attracteur reconstruit à partir de l'évolution de la concentration en $[\text{Ce}^{4+}]$.



(a) Section de Poincaré



(b) Application de premier retour

FIG. 7.13 – Section de Poincaré P_0 et l'application de premier retour qui lui est associée. Quatre branches monotones codées respectivement 0, 1, 3 et 5 sont obtenues.

provient de la structure en épis de l'extrémité de la section de Poincaré (Fig. 7.13.a). Il n'est pas essentiel pour notre étude.

Sur les quatre branches monotones, nous pouvons définir une dynamique symbolique à quatre lettres : une paire et trois impaires. Nous les choisissons comme indiqué sur la figure 7.13.b. La dynamique symbolique est donc définie par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si} & X > -4.26 \\ 1 & \text{si} & -4.26 > X > -11.74 \\ 3 & \text{si} & -11.74 > X > -19.88 \\ 5 & \text{si} & -19.88 > X \end{cases} \quad (7.11)$$

La population d'orbites périodiques est alors extraite de cet attracteur. Elle est reportée dans le tableau 7.2. Nous constatons qu'aucune orbite de période inférieure à 6 ne comporte de lettre "5". Seules deux orbites de période 6 en comportent une. Un élagage est présent sur les orbites dont les séquences contiennent les lettres "1". Par exemple, les orbites codées par des séquences de la forme (10^n) et (10^{n-1}) ont disparu de l'attracteur. Précisons que toutes les orbites périodiques de l'attracteur ont pu être codées sur cette dynamique symbolique :

la partition choisie est donc génératrice.

Comme le montrent A. Arnéodo *et al* [13], ce système est très semblable au système de Rössler [17] étudié au chapitre 2 de ce mémoire. De ce fait, nous gageons que le patron de ce système est constitué des bandes 0, 1, 3 et 5 du système de Rössler. Suivant la matrice de liaisons proposée section 2.4.3, la matrice de liaisons du patron de l'attracteur représenté Fig. 7.12 est alors :

$$M_{mod} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Le patron est représenté Fig. 7.14.

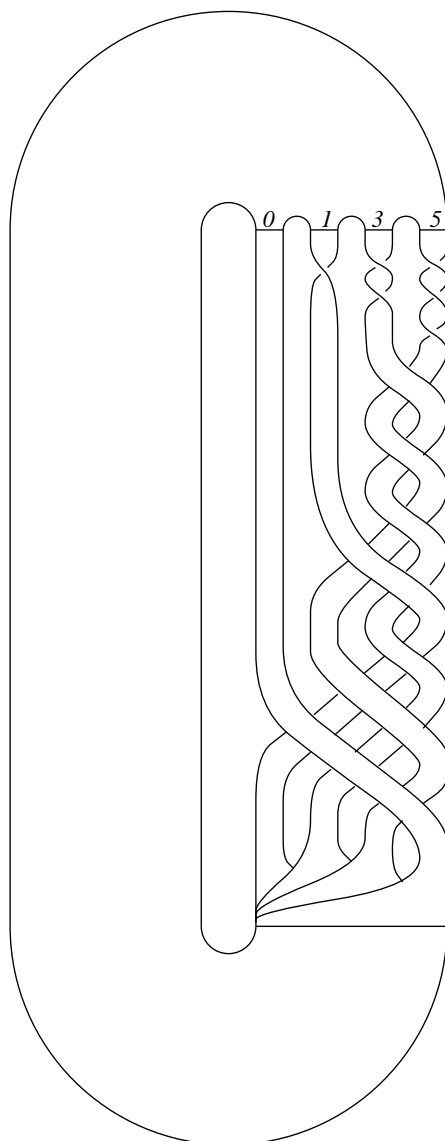


FIG. 7.14 – Patron de l'attracteur généré par le modèle de la réaction de Belousov-Zhabotinskii.

Commençons par valider les trois premières bandes du patron. Pour cela, nous choisirons les couples d'orbites

TAB. 7.2 – Population d'orbites périodiques de l'attracteur du modèle de la réaction de Belousov-Zhabotinskii.

période	nombre	coordonnée en x	coordonnée en z	séquence
1	1	-6.593684014826576	12.778730925251143	1
2	2	-13.215111721260056	28.767316803539149	30
		-9.776943542966405	20.545458826767785	10
3	3	-15.376778488899028	33.613166341447567	300
		-14.669091976115080	32.061612560909786	301
		-11.587219764043109	24.933932394038848	101
4	6	-16.934946862717322	36.897605721754672	3000
		-16.508054277406579	36.016409449861918	3001
		-14.011004662562279	30.587515451913923	3011
		-13.711377312712454	29.906911143374710	3010
		-13.358845643431444	29.098908699548172	3031
		-10.699132319184518	22.793070126313715	1011
5	11	-18.199424262123785	39.422048266344959	30000
		-17.903999391883474	38.843838107503984	30001
		-15.981815330674948	34.910617635102426	30011
		-15.832214135498482	34.592350256393686	30010
		-15.564662445822798	34.019020093014227	30031
		-15.494379078309988	33.867484676003087	30030
		-14.606822512600969	31.923402268256599	30130
		-14.549219452130712	31.795285480034160	30131
		-14.383815054389876	31.426207386762734	30110
		-14.267566238981905	31.165684749238306	30111
		-11.359561477440707	24.387931669833371	10110
		-11.029546556152017	23.592846663594582	10111
6	24	-20.258773322538698	43.252721522059929	500000
		-20.097498248472380	42.965360470663541	500001
		-19.289316782402800	41.493021367190678	300000
		-19.073114729807703	41.089992655243734	300001
		-17.441952227226835	37.925307793274143	300011
		-17.350767153979572	37.742009715601981	300010
		-17.123183421349971	37.281542270001523	300031
		-17.078719971162126	37.191101996281311	300030
		-16.413043333506895	35.818336255379130	300130
		-16.379964237895713	35.749380356708066	300131
		-16.248271123049062	35.473217018648235	300110
		-16.186878172191484	35.344066420088453	300111
		-15.408069081131185	33.680960417532148	300301
		-14.163073090116796	30.930740460894764	301111
		-14.115501192412825	30.823520472640187	301110
		-14.050758319670681	30.677391892595089	301131
		-14.025666577325016	30.620677549920003	301130
		-13.698688401833799	29.877959190694686	301030
		-13.661503689712667	29.793067020771243	301031
		-13.567982171134368	29.579170788009726	301010
		-13.489461711473158	29.399190688427090	301011
		-13.360119651762009	29.101853528721438	301130
		-10.892914681486943	23.262553154537816	101111
		-10.751836541413608	22.920928881078193	101110

périodiques (10,1) et (301,300). Des projections de ces paires donnent des nombres de liaisons respectivement égaux à :

$$\begin{cases} L(10,1) = -1 \\ L(301,300) = -4 \end{cases} \quad (7.13)$$

Ces nombres doivent être égaux à ceux donnés par la relation :

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} M(\sigma_i, \tau_j) + N_{ins}(N_1, N_2) \right] \quad (7.14)$$

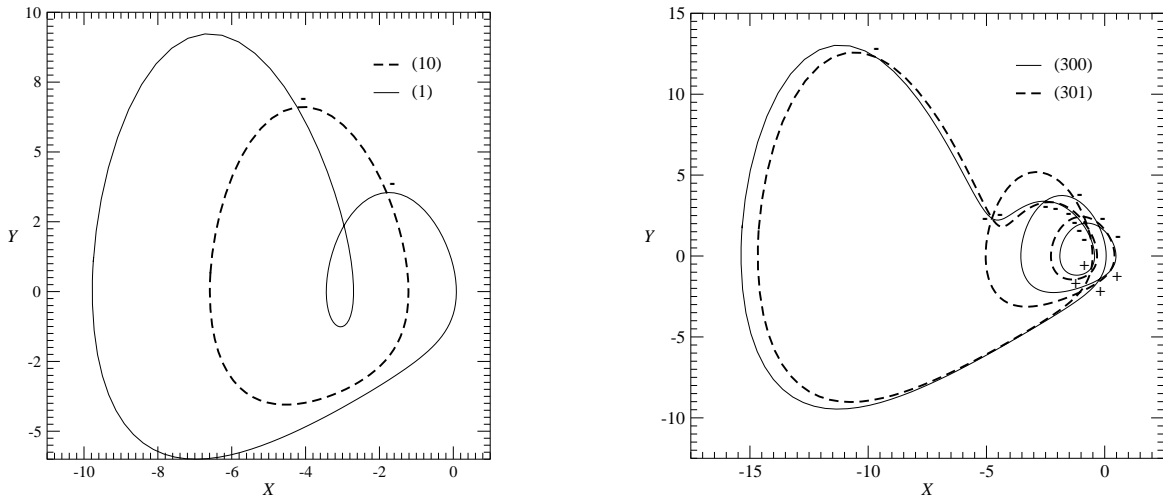
où les N_i désignent les orbites de période p_i considérées. $M(\sigma_i, \tau_j)$ représentent les éléments de la matrice de liaisons où σ_i et τ_j sont les lettres des séquences symboliques des orbites considérées. $N_{ins}(N_1, N_2)$ est le nombre d'intersections positives comptées sur le graphe d'insertion (présenté au chapitre 2). Les graphes sont construits Fig. 7.16. Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} L(10,1) &= \frac{1}{2} [M(1,1) + M(1,0) + N_{ins}(10,1)] = \frac{1}{2} [-1 - 1 + 0] = -1 \\ L(301,300) &= \frac{1}{2} [M(3,3) + 3M(3,0) + M(3,1) + 2M(1,0) + M(0,0) \\ &\quad + N_{ins}(301,300)] = \frac{1}{2} [-3 - 3 - 2 - 2 + 0 + 2] = -4 \end{cases} \quad (7.15)$$

Les trois premières bandes sont donc validées. Afin de valider la bande 5, il nous faut maintenant une orbite de période 6 dont la séquence symbolique contient un "5". Prenons le couple (500000,1). Une projection de cette paire (Fig. 7.17) offre un nombre de liaisons $L(500000,1)$ égal à -1 . Le nombre d'insertion est trouvé égal à $+5$. La relation algébrique (7.14) nous donne :

$$\begin{aligned} L(500000,1) &= \frac{1}{2} [M(5,1) + 5M(1,0) + N_{ins}(500000,1)] \\ &= \frac{1}{2} [-2 - 5 + 5] = -1 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Le patron est maintenant complètement validé.



(a) Projection de la paire (10,1) : $L(10,1)=-1$

(b) Projection de la paire (301,300) : $L(301,300)=-4$

FIG. 7.15 – Détermination des nombres de liaisons par décompte des intersections orientées sur une projection régulière.

Remarquons que les deux premières bandes de ce patron induisent une organisation des orbites périodiques identique à celle induite par le patron obtenu par G. B. Mindlin *et al*, au signe près. En effet, les torsions locales sont positives sur le patron proposé par G. B. Mindlin *et al* alors qu'elles sont négatives sur le patron du modèle

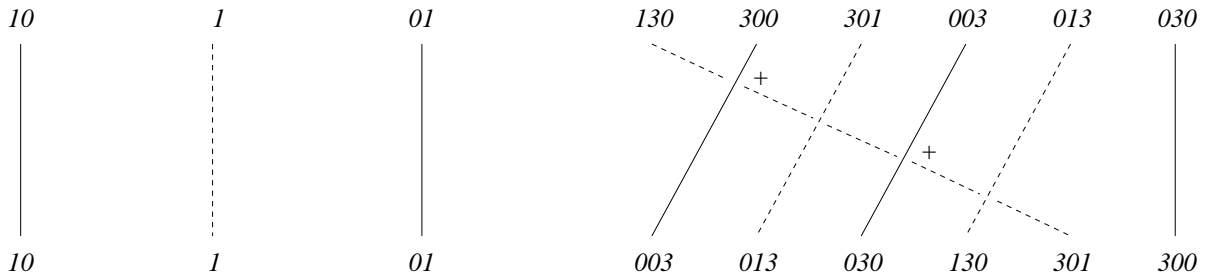
(7.9). Nous ne savons pas à l'heure actuelle quel est le rôle du signe des torsions sur un système dynamique. Nous pouvons juste dire que les lois d'apparition des orbites périodiques sont identiques et que leurs organisations sont identiques au sein des deux systèmes.

Il pourrait être intéressant de valider ce modèle par rapport aux données expérimentales utilisées par F. Argoul, A. Arnéodo et P. Richetti [14]. Malheureusement, nous ne possédons pas encore les enregistrements de ces séries temporelles.

7.4 Conclusion

Nous avons établi une brève revue des applications de la topologie à des systèmes expérimentaux. Pour l'ensemble de ces dynamiques, excepté le modèle de la réaction de Belousov-Zhabotinskii, nous avons obtenu des dynamiques type "Rössler à deux bandes" (au signe près), et ce, bien que les attracteurs aient des aspects très différents. Ce résultat met en évidence une propriété synthétique de la caractérisation topologique : le patron obtenu ne tient compte que de la somme des contributions des différentes torsions locales que subit l'attracteur. L'organisation globale des orbites périodiques peut être ainsi mise en évidence et leur ordre d'apparition plus facilement formalisé. Du point de vue local, dans une section de Poincaré par exemple, les dynamiques de tous les systèmes sont identiques : l'application de premier retour présente un unique maximum différentiable.

Par contre, si nous envisageons d'utiliser la caractérisation topologique pour établir des classes d'équivalence de systèmes dynamiques, nous sommes en droit de nous interroger sur la pertinence de ne pas distinguer la dynamique générée par le laser CO_2 de celles des autres systèmes laser. Le laser CO_2 avec absorbant saturable et le laser RMN ont, quant à eux, des dynamiques très semblables à celle observée par G. B. Mindlin *et al* sur la réaction de Belousov-Zhabotinskii (le cas est différent pour celle étudiée par F. Argoul, A. Arnéodo et P. Richetti puisqu'elle correspond à un chaos plus développé). Il est probable que chaque torsion locale devra être représentée sur le patron de manière à améliorer les possibilités de la caractérisation topologique.



(a) Graphe d'insertion de la paire (10,1). La base inférieure est construite sur l'ordre naturel. La base supérieure est obtenue en inversant les points périodiques de la bande 1 et en permutant en bloc les deux groupes de points de chacune des deux bandes car $M(1,0)$ est impair. On obtient $N_{ins}(10,1) = 0$.

(b) Graphe d'insertion de la paire (301,300). La base inférieure est construite sur l'ordre naturel. La base supérieure est obtenue en inversant les points périodiques de la bande 3 (de parité impaire) et en permutant en bloc les points des bandes 1 et 3 avec ceux de la bande 0 car $M(1,0)$ et $M(3,0)$ sont impairs. On obtient $N_{ins}(301,300) = 2$.

FIG. 7.16 – Graphe d'insertion pour les deux couples d'orbites périodiques étudiées.

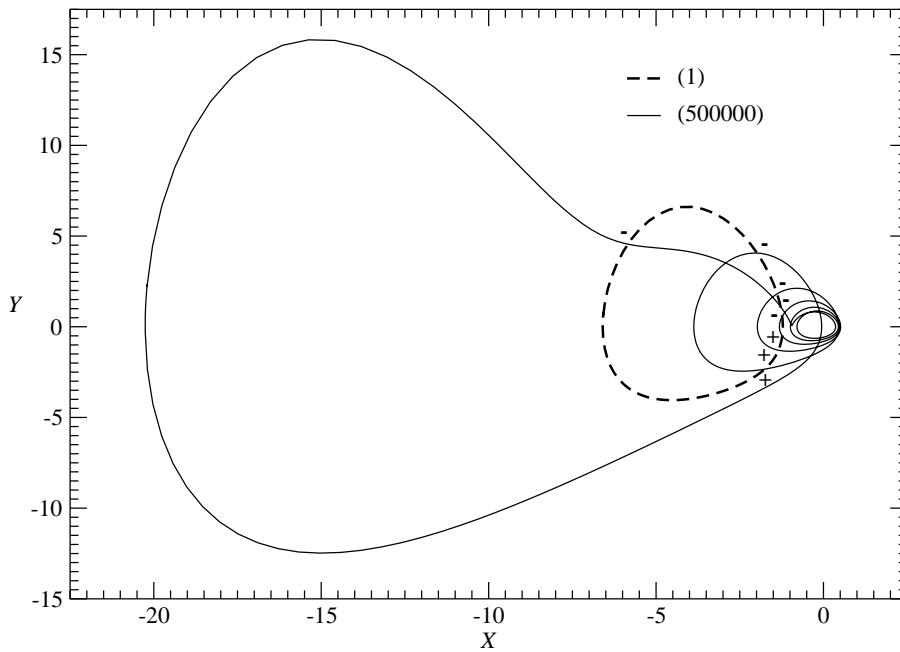


FIG. 7.17 – Projection de la paire (500000,1) : $L(500000,1) = -1$.

Bibliographie

- [1] **P. Cvitanović.** Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and Quantum Chaos, *Physica D*, 51, pp. 138-151, 1991.
- [2] **G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, X. J. Hou.** Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski, *Journal of Nonlinear Sciences*, 1, pp. 147-173, 1991.
- [3] **T. Midavaine, D. Dangoisse, P. Glorieux.** Observation of chaos in a frequency-modulated CO_2 laser, *Physical Review Letters*, 55 (19), pp. 1989-2992, 1985.
- [4] **N. B. Tuffillaro, R. Holzner, L. Flepp, E. Brun, M. Finardi, R. Badii.** Template analysis for a chaotic NMR laser, *Physical Review A*, 44 (8), pp. 4786-4788, 1991.
- [5] **L. Flepp, R. Holzner, E. Brun, M. Finardi, R. Badii.** Model identification by periodic-orbit analysis for NMR-laser chaos, *Physical Review Letters*, 67 (17), pp. 2244-2247, 1991.
- [6] **F. Pappoff, A. Fioretti, E. Arimondo, G. B. Mindlin, H. G. Solari, R. Gilmore.** Structure of chaos in the laser with saturable absorber, *Physical Review Letters*, 68 (8), pp. 1128-1131, 1992.
- [7] **P. Couillet, C. Tresser.** Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *Journal de Physique*, Colloque C5, supplément au n°8 (39), pp. C5-25, 1978.
- [8] **M. J. Feigenbaum.** Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformation, *Journal of Statistical Physics*, 19 (1), pp. 25-52, 1978.
- [9] **M. Lefranc, P. Glorieux.** Topological analysis of chaotic signals from a CO_2 laser with modulated losses, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 3 (3), pp. 643-650, 1993.
- [10] **P. Grassberger, R. Hegger, H. Kantz, C. Schaffrath, T. Schreiber.** On noise reduction methods for chaotic data, *Chaos*, 3 (2), pp. 127-141, 1993.
- [11] **E. N. Lorenz.** Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, pp.130-141, 1963.
- [12] **J. C. Roux, H. Swinney.** Topology of chaos in a Chemical reaction, *Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics*, eds. C. Vidal, A. Pacault, Springer-Verlag, 1981.
- [13] **A. Arnéodo, F. Argoul, J. Elezgaray, P. Richetti.** Homoclinic chaos in chemical systems, *Physica D*, 62, 134-169, 1993.
- [14] **F. Argoul, A. Arnéodo, P. Richetti.** Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Physics Letters A*, 126 (6), pp. 269-275, 1987.
- [15] **J. C. Roux, R. H. Sinoyi, H. L. Swinney.** *Physica D*, 8, p. 257, 1983.
- [16] **P. Richetti, P. De Keeper, J. C. Roux, H. L. Swinney.** A crisis in the Belousov-Zhabotinskii reaction : experiment and simulation, *Journal of Statistical Physics*, 48, pp. 977-990, 1987.
- [17] **O. E. Rössler.** An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters*, 57A (5), pp.397-398, 1976.

Chapitre 8

Du chaos dans les étoiles

8.1 Introduction

S'il est certain que des variations de la brillance de certaines étoiles ont été observées vers le XVI^e siècle, il semble qu'elles n'ont pas échappé aux astronomes de l'Antiquité. Ainsi, les Assyriologistes avancent que les textes babyloniens annoncent la découverte de variations stellaires il y a environ 2000 ou 3000 ans. L'hypothèse des variations de la brillance des étoiles réapparaît dans la première moitié du XVI^e siècle. Il semble que la principale raison de cette occultation provienne de la pensée Aristotélicienne : la nature divine, impérissable et inaltérable de la matière dont sont faits les corps célestes interdit toute évolution des étoiles. De telles observations étaient ignorées sur le compte du manque de *sérieux observationnel* [1].

La première observation de la brillance d'un corps céleste variant périodiquement date donc de la fin du XVI^e siècle. Elle serait dûe à David Fabricius. Dans son ouvrage *De Stella Nova*, Kepler date cette découverte au 13 Août 1596. Au début du XIX^e siècle, la communauté scientifique explique ces variations à l'aide de la théorie de l'éclipse basée sur la mécanique céleste. Il faut attendre la fin du XIX^e siècle pour que les variations de la luminosité soient expliquées en termes de gravitation et de transport de chaleur. Jusqu'au début des années 80, l'évolution des étoiles, dites pulsantes lorsqu'elles présentent des variations temporelles de leur luminosité et de leur vitesse radiale, a été pensée en termes de comportements plus ou moins périodiques. Avec la précision croissante des observations et de l'augmentation du temps d'acquisition, plusieurs étoiles ont été identifiées comme multipériodiques ou irrégulières.

La description de comportements très complexes par des systèmes dynamiques non-linéaires à quelques degrés de liberté a conduit les astrophysiciens à modéliser les étoiles par de tels systèmes. C'est pourquoi la présence du chaos fut tout d'abord observée sur des modèles numériques. Ainsi, J. R. Buchler, G. Kovačs et M. J. Goupil [2] présentent des attracteurs du type "Rössler à deux bandes" générés par un modèle hydrodynamique en description lagrangienne unidimensionnelle. Le mécanisme de transport de chaleur est la diffusion radiative. L'étoile est discrétisée en 60 couches définies chacune par un rayon, une vitesse et une entropie (ou une autre variable thermodynamique). La dimension de l'espace des phases est alors de 180. Pourtant, la dimension de l'attracteur, estimée à l'aide de l'algorithme de P. Grassberger et I. Procaccia [3], est voisine de 2.5! Ainsi, la représentation de l'attracteur peut être correctement réalisée dans un espace à trois dimensions. Les paramètres du modèle (la masse, la luminosité, la composition et la température effective) correspondent à des étoiles du type W Vir, RV Tauri ou de celles qui peuplent les Céphéides froides.

Sur ce modèle, J. R. Buchler, G. Kovačs et M. J. Goupil [4] observent un doublement de période et une intermittence [5]. Par ailleurs, la plupart des routes vers le chaos ont été observées sur des modèles rudimentaires des oscillations stellaires (pour une revue détaillée, consulter [1]).

Malgré une connaissance des étoiles sans cesse approfondie, la physique précise des étoiles demeure inconnue. Aussi, il est important de distinguer des familles génériques parmi les comportements temporels des étoiles. Etant donnée l'évolution à long terme des comportements stellaires, ces classes de comportements devront survivre aux variations des paramètres de contrôle [1]. De plus, la technique d'analyse devra être robuste au bruit observationnel qui reste la principale source de difficultés dans l'analyse des données stellaires [6].

Il existe deux types de quantités pour caractériser un attracteur : les quantités géométriques et les quantités topologiques. Les quantités géométriques telles que la dimension ou les exposants de Lyapunov, sont basées sur la notion de distance dans l'espace des phases. Ce sont des réels et ces quantités sont particulièrement sensibles au bruit (les distances étant rapidement perturbées par le bruit). De plus, elles sont sensibles aux variations des paramètres de contrôle et il n'est pas établi précisément dans quelle mesure elles caractérisent un système. Par contre, les quantités topologiques sont une signature de l'organisation relative des orbites périodiques. Ces quantités sont peu sensibles au bruit car seule la connaissance de quelques orbites de faible période, que le bruit affecte peu, est requise [7]. Ainsi, G. B. Mindlin *et al* [8] ont pu caractériser la topologie d'un attracteur à partir d'une série expérimentale bruitée à 60 %. L'énorme avantage des invariants topologiques est qu'ils sont préservés sous des variations des paramètres de contrôle du système. De ce fait, la caractérisation topologique correspond pleinement à l'outil recherché par J. Perdang [1] pour distinguer différentes familles stellaires.

Aussi, nous appliquerons la caractérisation topologique à un modèle simple représentant les pulsations stellaires radiales. Ce modèle est dû à M. Auvergne et A. Baglin [9]. Il génère un attracteur chaotique pourvu de symétrie centrale [10] qui nécessitera de généraliser un peu plus la procédure développée aux chapitres 3 et 5.

8.2 Un modèle d'étoile pulsante

M. Auvergne et A. Baglin [9] montrent que les variations relatives du rayon ($x = \frac{\delta r}{\bar{r}}$) d'une zone de l'étoile, où \bar{r} est le rayon de la zone à l'équilibre, obéissent à la loi :

$$\ddot{x} + \ddot{x} + \lambda(1 + \alpha x^2)\dot{x} + \beta x = 0 \quad (8.1)$$

où les coefficients α , β et λ sont respectivement définis par :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1)^2}{\gamma_1} \\ \beta = \frac{B}{A} \frac{1}{A^2 K^2} \\ \lambda = \frac{\gamma_1}{A^2 K^2} \end{cases} \quad (8.2)$$

où γ_1 est une fonction de l'exposant adiabatique qui gouverne le degré d'instabilité, γ_2 une fonction de l'abondance en nombre d'éléments ionisés et de $\eta = \frac{\chi}{kT}$ où χ est le potentiel d'ionisation. Le terme $A^2 K^2$ quantifie l'écart à l'adiabacité et B/A est le terme de source de l'étoile. Le terme \dot{x} représente la dérivée par rapport au temps adimensionnel τ égal à $AK\omega_0 t$ où $\omega_0^2 = \frac{GM}{r^3}$ (G est la constante gravitationnelle, M la masse de la couche étudiée de l'étoile et r le rayon de cette couche). Il représente le rapport du temps sur le temps thermique $t_{th} = 1/AK\omega_0$ de l'étoile. Suivant M. Auvergne et A. Baglin [9], ces coefficients seront fixés à

$$\begin{cases} \gamma_1 & = & -0.3 \\ \gamma_2 & = & 25.0 \\ A^2 K^2 & = & 10^{-2} \end{cases} \quad (8.3)$$

Le terme de source B/A est choisi comme paramètre de contrôle du système. Nous l'avons fixé à 0.12066. Ce choix a été guidé par l'application de premier retour. Le paramètre choisi correspond à une application de premier retour dont les deux branches monotones se joignent au niveau du point critique (voir Fig. 8.7, section suivante).

De manière à ramener le système (8.1) à un système d'équations différentielles ordinaires, nous devons effectuer le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = x \\ y = \dot{x} \\ z = \ddot{x} \end{cases} \quad (8.4)$$

Nous obtenons alors le système tridimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -[z + \lambda(1 + \alpha x^2)y + \beta x] \end{cases} \quad (8.5)$$

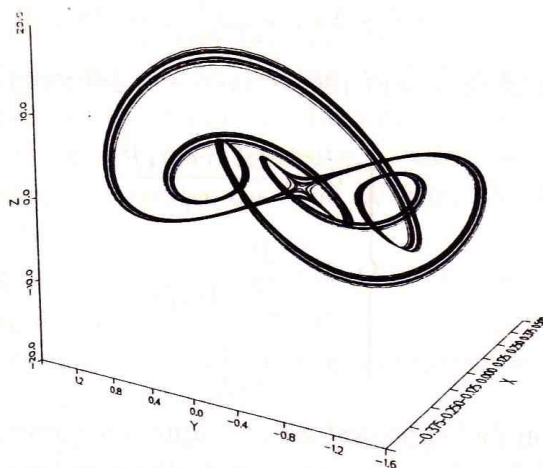


FIG. 8.1 – Attracteur représentatif du comportement de l'étoile pulsante.

L'attracteur généré par ce système est représenté sur la Fig. 8.1. Remarquons que ce système est équivariant, c'est à dire qu'il satisfait à la propriété suivante :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}, \gamma \mathbf{x}(t)) = \gamma \mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}(t)) \quad (8.6)$$

où \mathbf{x} est le vecteur de composantes (x, y, z) , $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur de l'espace des paramètres et \mathbf{f} représente le champ de vecteur du système (8.5). γ est une matrice carrée, 3×3 , qui définit l'équivariance. La symétrie étant centrale, γ s'écrit

$$\gamma \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Cette symétrie se retrouve sur l'attracteur de la figure 8.1. La procédure de caractérisation topologique devra donc être analogue à celle développée sur le système de Lorenz [11, 12].

8.2.1 Construction du patron

Nous avons vu au cours de la première partie de ce mémoire le principe de la caractérisation topologique. Elle consiste à assimiler l'attracteur à un ruban sur lequel se développe les trajectoires. En divisant le ruban en régions dont les propriétés topologiques sont distinctes, nous pouvons alors schématiser l'attracteur par un patron.

Ceci est réalisé à partir de la projection de l'attracteur (Fig. 8.2) et d'un logiciel de visualisation tridimensionnelle¹. Avant d'obtenir le patron définitif, une succession d'étapes intermédiaires est requise. Une traduction directe en terme de ruban de la projection de l'attracteur (Fig. 8.2) est représentée Fig. 8.3.

¹Advanced Visual Systems Inc. 300 Fifth Ave. Waltham, MA 02154

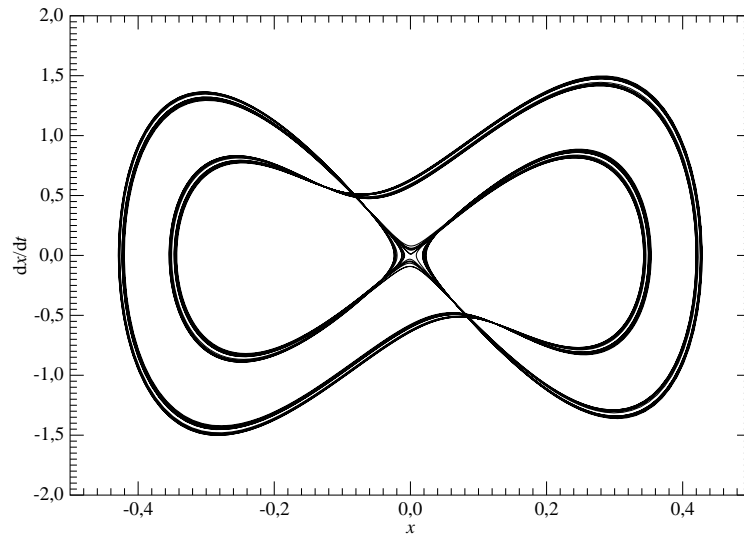


FIG. 8.2 – Projection de l'attracteur solution du modèle simple d'une étoile pulsante : l'attracteur est à symétrie centrale qui provient de la symétrie sphérique du modèle.

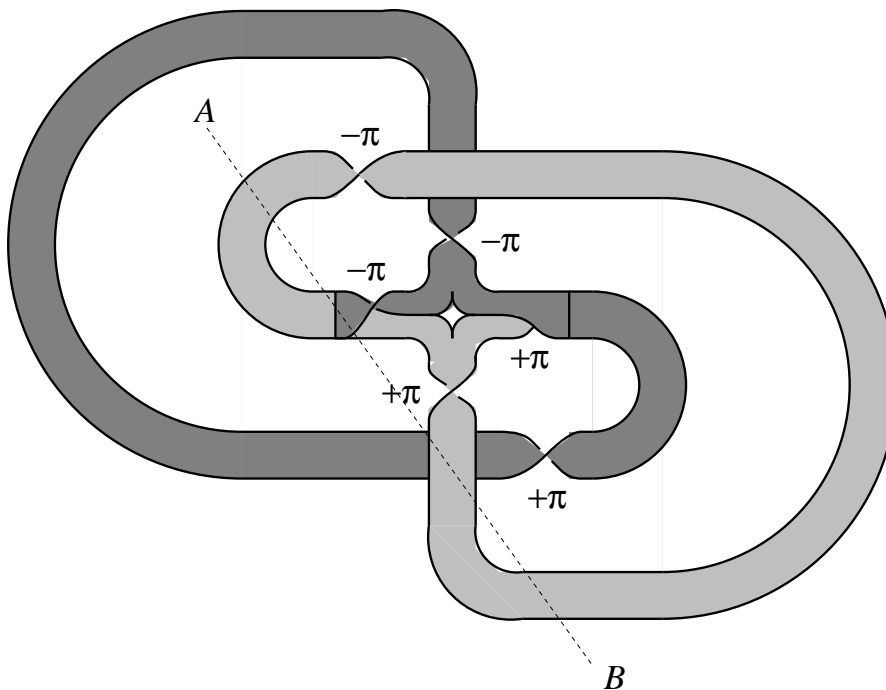


FIG. 8.3 – Représentation en terme de ruban de la projection dans le plan (x, \dot{x}) de l'attracteur. Afin de simplifier la représentation, la boucle en gris foncé subit une rotation de $-\pi$ suivant l'axe défini par les points A et B. Chaque torsion locale du ruban est signée : une rotation de $+\pi$ a pour image par rapport à l'origine une rotation de $-\pi$.

Nous remarquons qu'à chaque torsion du ruban est associée une torsion symétrique de signe opposé. En effet, une symétrie centrale inverse les rotations [12]; cette propriété aura des conséquences fondamentales sur la détermination du patron. Nous devons auparavant, achever l'extraction du patron. Pour cela, nous devons simplifier la structure du ruban. Deux torsions locales apparaissent sur la boucle en gris clair : elles sont opposées et s'annulent donc. Il en est de même pour les deux torsions locales de la boucle en gris foncé. Nous imposons maintenant une rotation de $-\pi$ suivant l'axe AB de la boucle en gris clair (Fig. 8.3). Cette rotation induit deux torsions locales opposées qui s'annulent donc. Une rotation symétrique (donc de $+\pi$) est imposée suivant le même principe à la boucle en gris foncé. Nous aboutissons alors à une configuration beaucoup plus simple représentée Fig. 8.4.

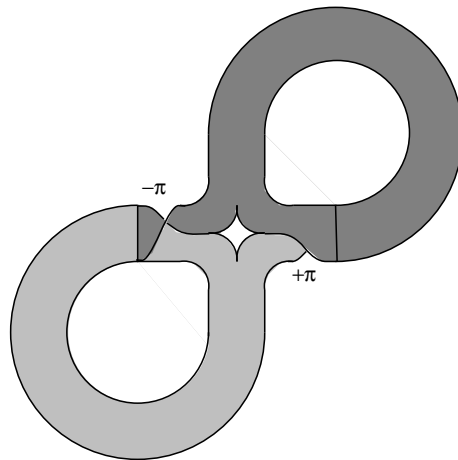


FIG. 8.4 – Les rotations opposées ont été annihilées : les deux ailes ont été repliées sur elles-mêmes. Il ne reste que les deux repliements : le rotation $-\pi$ correspond au repliement de la boucle en gris foncé sur la boucle gris clair. La rotation $+\pi$, symétrique de la première, correspond au repliement de la boucle gris clair sur la boucle gris foncé. Cette dernière rotation n'est pas très visible sur la figure car elle est masquée par la boucle en gris foncé.

La structure obtenue est alors représentée sous la forme d'un double patron (Fig. 8.5). Chaque patron correspond au domaine fondamental (ou une de ses copies) qui, par copies successives, permet la restitution complète du portrait de phases. Dans le cas présent, le domaine fondamental est copié une fois. La symétrie étant centrale, une copie présente des rotations de signes opposés aux rotations présentes sur le domaine fondamental.

P. Cvitanović et B. Eckardt [13] ont montré que la description dynamique doit se faire uniquement sur le domaine fondamental. Comme pour le système de Lorenz (chapitre 3), le double patron (Fig. 8.5) est alors divisé en deux patrons (Fig. 8.6) : ils sont opposés l'un de l'autre, véritable signature de la symétrie centrale. Le premier (Fig. 8.6.a) présente une bande pourvue d'une torsion locale de $+\pi$. Au contraire, le second (Fig. 8.6.b) est constitué d'une bande de torsion locale de $-\pi$. Dans les deux cas, une seconde bande dépourvue de torsion locale est présente. Toutefois, le second patron (Fig. 8.6.b) n'est pas en accord avec la convention d'insertion standard [14]. Un croisement supplémentaire entre les deux bandes doit donc être ajouté de manière à ce que les bandes soit représentées de l'arrière vers l'avant et de la gauche vers la droite.

L'attracteur généré par le modèle de l'étoile pulsante est alors caractérisé indifféremment par ses deux patrons. Il persiste une indétermination sur le signe de la rotation, véritable signature de la symétrie centrale du modèle.

8.2.2 Validation par les orbites périodiques

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la construction d'une application de premier retour d'un système équivariant doit se construire sur le domaine fondamental, c'est à dire qu'un ensemble de Poincaré Σ , constitué

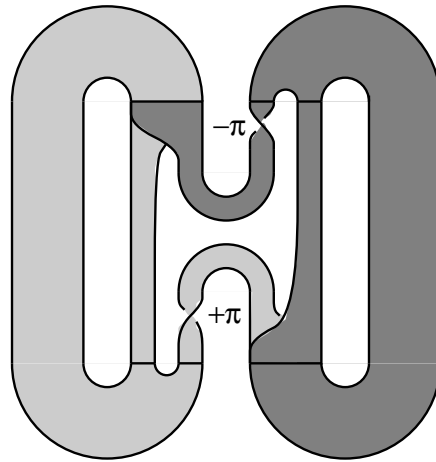


FIG. 8.5 – Double patron symétrique par rapport à l’origine de l’attracteur du modèle de l’étoile pulsante.

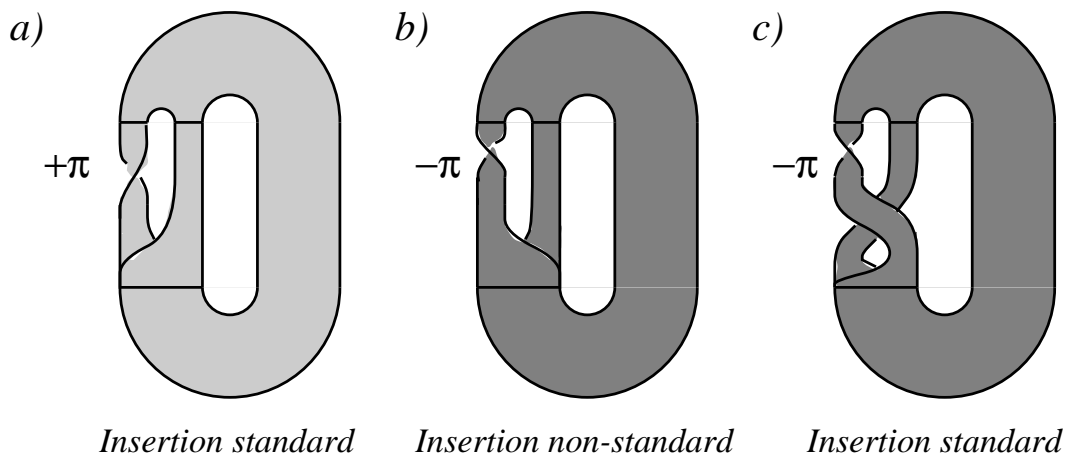


FIG. 8.6 – Les deux patrons issus du double patron sont ici représentés : la torsion locale apparaissant sur la bande extérieure est négative (a) ou positive (b). La convention d’insertion n’est pas respectée sur la représentation (b) : un croisement entre les bandes doit être introduit (c).

TAB. 8.1 – Population d'orbites périodiques instables de l'attracteur représentatif de l'étoile pulsante.

période	nombre	coordonnée en x	coordonnée en y	séquence
1	1	0.280685391937022	1.464763514002338	1
2	1	0.282075651265174	1.491807868312381	10
3	0			
4	1	0.282338705009153	1.496595893436384	1011
5	0			
6	2	0.282482667303333 0.282534874219053	1.499398362313127 1.500340931658411	101110 101111

de deux sections de Poincaré Σ_+ et Σ_- , doit être utilisé. Les deux sections Σ_{\pm} sont respectivement définies par

$$\Sigma_+ \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 0, x > 0.27\}$$

et

$$\Sigma_- \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 0, x < 0.27\}$$

Ces deux sections ne doivent pas être distinguées par la variable utilisée pour la construction de l'application de premier retour [11]. Aussi la valeur absolue de la variable x est utilisée (Fig. 8.7).

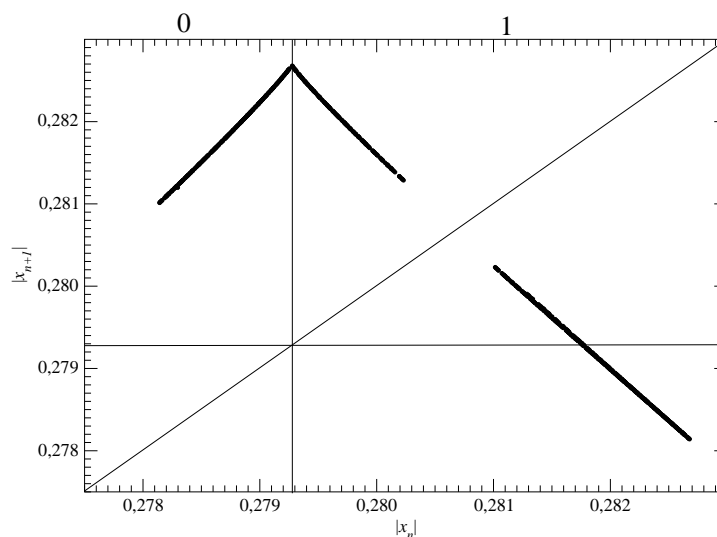


FIG. 8.7 – Application de premier retour de l'ensemble de Poincaré Σ à lui-même : deux branches monotones sont présentes, une croissante et une décroissante.

Deux branches monotones sont obtenues (Fig. 8.7) : une croissante et une décroissante. Ceci est bien en accord avec la bande paire (sans torsion locale) et la bande impaire (torsion de $-\pi$) obtenues sur le patron (Fig. 8.6). Assignons respectivement à ces deux bandes les chiffres 0 et 1 afin de coder la population d'orbites périodiques. La population présente au sein de l'attracteur est reportée dans le tableau 8.1.

Comme le laissait présager l'application de premier retour, la population d'orbites périodiques est fortement élaguée. Aucune orbite de période 3 et 5 ne sont apparues. Rappelons que ces périodes sont les dernières à

apparaître selon le théorème de Sarkovskii [15, 16]. De plus, les séquences symboliques obtenues sont en parfait accord avec l'ordre d'apparition donné par la dynamique symbolique (voir chapitre 2).

Nous prenons le couple d'orbites (1,10) afin de valider le patron. La projection de ces orbites (Fig. 8.8) et une consultation de la troisième coordonnée permet la détermination du nombre de liaisons $L(1, 10)$. Ce nombre ne peut être signé en raison des propriétés des symétries centrales. Le nombre de liaisons est compté sur le domaine fondamental qui correspond au ruban gris foncé (ou clair) Fig. 8.3. Pratiquement, ceci se réalise en ne tenant compte que de la moitié gauche (ou de la moitié droite) de la projection (Fig. 8.8). Nous choisissons arbitrairement le ruban gris foncé comme référence (ou comme domaine fondamental). Des complications vont apparaître car sur ce demi-plan, le domaine fondamental n'est pas présent dans son ensemble alors qu'une partie de sa copie l'est. De ce fait, nous devons tenir compte des intersections entre le domaine fondamental (gris foncé) et sa copie (gris clair). Ceci peut être vu sur la figure 8.2 où nous pouvons aisément voir une intersection entre la boucle gris clair et la boucle gris foncé. Trois types d'intersections sont alors à distinguer :

- les intersections entre les deux orbites au sein du domaine fondamental : le signe est conservé (groupe A, Fig. 8.8),
- les intersections entre les deux orbites, l'une étant sur le domaine fondamental et l'autre sur sa copie : le signe doit être inversé car l'effet de la symétrie est impliqué (groupe B, Fig. 8.8),
- les intersections entre les deux orbites au sein de la copie : le signe doit être inversé (groupe C et D, Fig. 8.8).

Ainsi, étant donné que la symétrie centrale inverse le signe des rotations, et donc celui des intersections, toute intersection mettant en jeu le ruban gris clair (le symétrique du ruban gris foncé) doit être inversée. Le décompte est le suivant :

$$L(1, 10) = \frac{1}{2} [(+2)_A - (+4)_B - (-2)_C - (+2)_D] = +1$$

Une construction du couple d'orbites sur le patron (Fig. 8.9) présente un nombre de liaisons de +1 (le patron Fig. 8.6.a a été choisi; le second patron aurait donné $L(1, 10) = -1$). Le signe du nombre de liaisons étant ici indéterminé, les deux patrons sont validés.

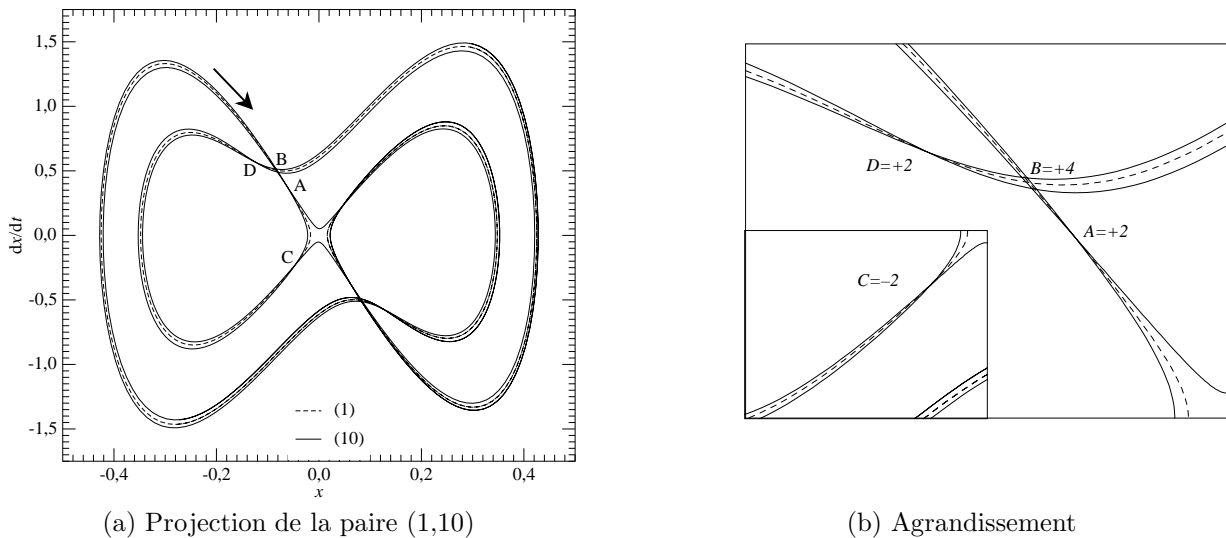


FIG. 8.8 – Projection du couple d'orbites périodiques (1,10). $L(1, 10) = +1$.

Cette procédure est vérifiée sur le couple d'orbites périodiques (1,1011). Le nombre de liaisons $L(1, 1011)$ obtenu sur la projection (Fig. 8.10) est égal à :

$$L(1, 10) = \frac{1}{2} [(+4)_A - (+8)_B - (-4)_C - (+4)_D] = +2$$

Ce nombre peut être aisément retrouvé par une construction des orbites sur le patron de la figure 8.9.

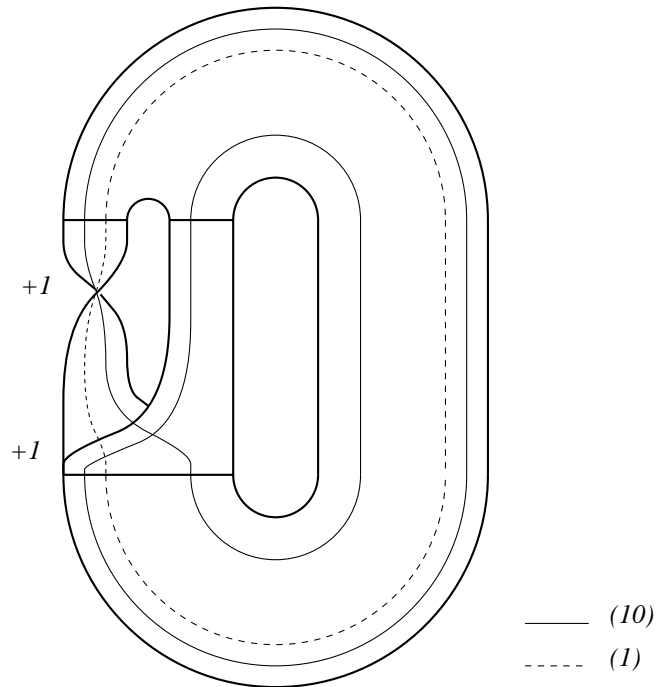
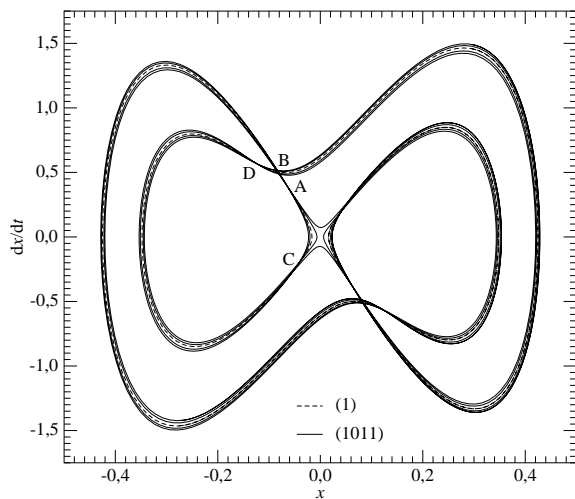
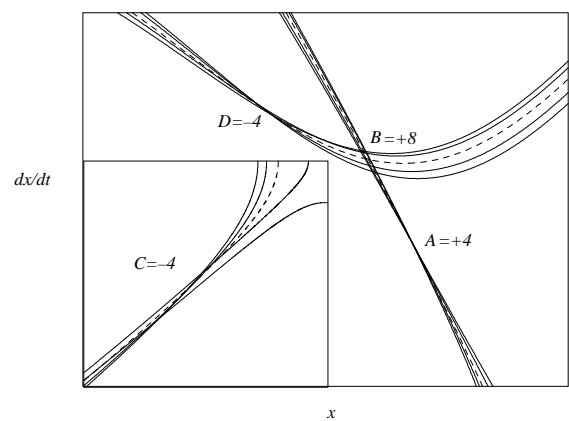


FIG. 8.9 – Construction des orbites périodiques sur le patron pourvu de torsions négatives. Le nombre de liaisons est de $L(1, 10) = \frac{1}{2}[+2] = +1$.



(a) Projection de la paire (1,1011)



(b) Agrandissement

FIG. 8.10 – Projection de la paire d'orbite périodiques : $L(1,1011)=+2$.

8.3 Analyse en fréquence

Nous avons vu que le système était équivariant. Ceci implique que toute analyse doit être faite sur le domaine fondamental à l'aide d'une variable invariante. Comme pour le système de Lorenz (chapitre 3), une telle analyse peut être réalisée à l'aide d'une valeur absolue sur l'une des variables du système. En effet, les variables du système sont équivariantes. De ce fait, par simple action de la matrice γ sur un état \mathbf{x}_0 du domaine fondamental, cet état est projeté sur la copie du domaine fondamental. L'action de la matrice γ transforme les coordonnées par une simple inversion de signe. Aussi prendre la valeur absolue d'une variable, c'est la rendre invariante sous l'action de la matrice γ . En d'autres termes, elle ne distingue plus le domaine fondamental et sa copie. L'analyse dynamique peut alors être effectuée en toute confiance.

Une telle procédure s'applique aussi lors du calcul d'un spectre de puissance. Le spectre de puissance de l'étoile est réalisé à partir de la valeur absolue de la variable x sur 32768 points échantillonnés sur le pas de temps $\tau = 0.05$. Le spectre est représenté Fig. 8.11.

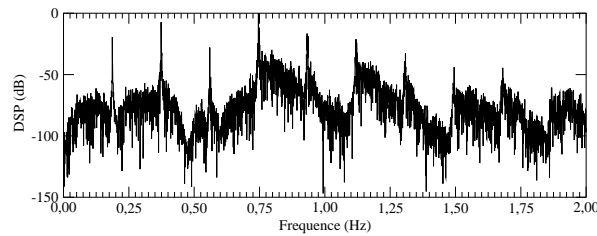


FIG. 8.11 – Spectre de puissance de l'évolution de l'étoile.

La fréquence fondamentale f_0 est de 0.75. La période des pulsations radiales de l'étoile est donc de l'ordre du temps thermique. Nous retrouvons sur le spectre les fréquences $f_0/2$ et $f_0/4$ encore très présentes, véritable signature d'une cascade de doublements de période. Comme nous l'avons vu sur la population d'orbites périodiques (Tableau 8.1), le chaos est faiblement développé.

8.4 Conclusion

Par l'intermédiaire de la topologie de l'attracteur, nous avons construit un patron représentatif de l'organisation des orbites périodiques. Il constitue une véritable "carte d'identité" de la dynamique de l'étoile. D'autre part, nous avons mis en évidence un domaine fondamental sur lequel toute analyse doit être effectuée. Ainsi, l'analyse en fréquence est menée sur ce domaine par l'intermédiaire de la valeur absolue de la variable.

De par sa robustesse au bruit et de sa faible dépendance vis à vis des paramètres de contrôle, la caractérisation topologique apparaît comme l'approche idéale pour la classification des étoiles.

Bibliographie

- [1] **J. Perdang**. *Radial stellar pulsations : Stability, chaos and beyond*, Sessions d'Aussoix, France, pp. 311-455, 1990.
- [2] **J. R. Buchler, G. Kovačs, M. J. Goupil**. *Chaotic pulsation in stellar models*, in Multimode stellar pulsations, edited by G. Kovačs, L. Szabados, B. Szreidl, Proceedings of the Workshop held in Budapest, Konkoly Observatory, Kultura, Hungary, 1988.
- [3] **P. Grassberger, I. Proccacia**. Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica D*, 9, pp. 189-198, 1983.
- [4] **J. R. Buchler, G. Kovačs**. *Astrophysical Journal Letters*, 320, L157, 1987.
- [5] **J. R. Buchler, M. J. Goupil, G. Kovačs**. *Physics Letters, A* 126, p. 177, 1987.
- [6] **M. J. Goupil, M. Auvergne, T. Serre**. Pulsating Stars and Fractals, *Lecture Notes in Physics*, m3, edited by A. Heck, J. M. Perdang, Springer-Verlag, 1991.
- [7] **G. B. Mindlin, X. J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, N. B. Tufillaro**. Classification of Strange Attractors by Integers, *Physical Review Letters*, 64 (20), pp. 2350-2353, 1990.
- [8] **G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, X. J. Hou**. Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski, *Journal of Nonlinear Sciences*, 1, pp. 147-173, 1991.
- [9] **M. Auvergne, A. Baglin**. A dynamical instability as a driving mechanism for stellar oscillations, *Astronomy-Astrophysics*, 142, pp. 388-392, 1985.
- [10] **F. Soufi**. *Etoiles pulsantes et Chaos*, Rapport de stage numérique, DEA d'Astrophysique et de Techniques Spatiales, Meudon, 1993.
- [11] **C. Letellier, P. Dutertre, G. Gouesbet**. Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E*, 49 (4), pp. 3492-3495, 1994.
- [12] **C. Letellier, G. Gouesbet**. Topological characterization of a system with a central symmetry, submitted to *Physical Review E*.
- [13] **P. Cvitanović, B. Eckhardt**. Symmetry Decomposition of Chaotic Dynamics, *Nonlinearity*, 6, pp. 277-311, 1993.
- [14] **P. Melvin, N. B. Tufillaro**. Templates and Framed Braids, *Physical Review A*, 44 (6), pp. 3419-3422, 1991.
- [15] **A. N. Sarkovskii**. Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into Itself, *Ukr. Math. Z.*, 16, pp. 61-71, 1964.
- [16] **P. Stefan**. A Theorem of Sarkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphisms of the Real Line, *Comm. Math. Physics*, 54, pp. 237-248, 1977.

Chapitre 9

Le chaos en electro-chimie.

9.1 Introduction

R. J. Field, E. Korös et R. M. Noyes [1] ont publié en 1972 une analyse du comportement oscillant de la réaction de Belousov-Zhabotinskii. Depuis, de nombreuses équipes ont largement étudié la nature de ces oscillations [2, 3]. Une revue complète sur cette réaction est donnée par A. Arnéodo *et al* [4]. La démonstration d'un comportement chaotique déterministe n'est maintenant plus à faire et la structure de l'attracteur présenté par cette réaction est bien connue [5].

Des oscillations apparaissent aussi durant des réactions électrochimiques. Ces réactions incluent les électrolyses [6]. De nombreuses études ont été réalisées récemment sur des réactions chimiques où l'existence de structures chaotiques a été mise en évidence [7, 8]. L'électrolyse du cuivre dans de l'acide phosphorique (H_3PO_4) a aussi été étudiée par F. Albahadily et M. Schell [9]. La route vers le chaos de cette réaction provient d'une bifurcation de Hopf suivie d'un doublement de période. Précisons que ce scénario est celui suivi par le système de Rössler [10] qui a été conçu pour modéliser les trajectoires dans l'espace des phases de réactions chimiques. L'objet de ce chapitre est la caractérisation topologique d'attracteurs expérimentaux issus des données fournies par l'équipe de J. L. Hudson¹.

9.2 Electrolyse du Cuivre

L'expérience est basée sur un disque de cuivre de 8 mm de diamètre et plongé dans une solution d'acide phosphorique à 85.7 % (pourcentage massique). Le disque est animé d'une rotation de 73.34 ts^{-1} et joue le rôle d'électrode. Une tension statique de 689 mV est appliquée à cette électrode. Le courant $I(t)$, exprimé en milliampère, est mesuré en fonction du temps à la fréquence de 1500 Hz (Fig. 9.1).

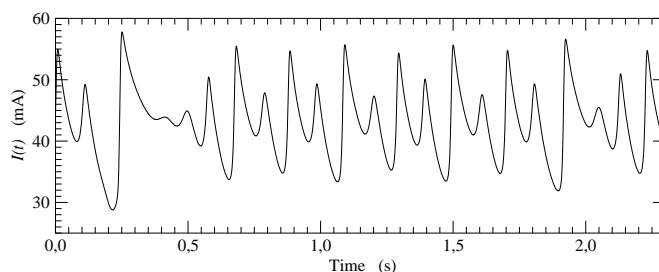


FIG. 9.1 – Evolution de l'intensité du courant traversant l'électrode en fonction du temps.

¹University of Virginia, Department of Chemical Engineering, Thornton Hall, Charlottesville, VA 22901, USA.

9.2.1 Quelques propriétés de l'attracteur

Le comportement asymptotique s'installe sur un attracteur étrange représenté dans un espace reconstruit par la méthode des décalages (Fig. 9.2) : le décalage temporel τ est égal à 0.01 s. L'attracteur est alors représenté dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 défini par les variables suivantes :

$$\begin{cases} X = i(t) \\ Y = i(t + \tau) \\ Z = i(t + 2\tau) \end{cases} \quad (9.1)$$

où $\tau = 0.08$ s.

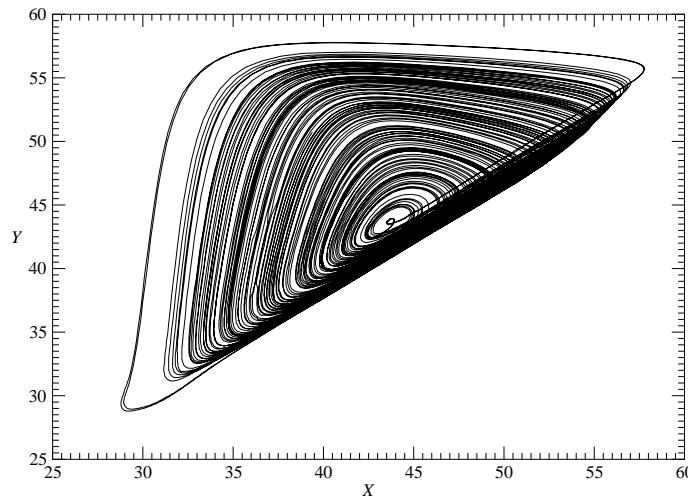


FIG. 9.2 – Projection de l'attracteur reconstruit représentatif de l'évolution de l'intensité du courant en fonction du temps dans le plan XY.

Le spectre de puissance est calculé sur 32768 points et laisse apparaître une fréquence principale à 9.76 Hz (Fig. 9.3). La pseudo-période T_0 de cet attracteur est donc de l'ordre de 102 ms. Le décalage temporel représente environ 10 % de la pseudo-période T_0 : le décalage est donc compris dans l'intervalle $[0, T_0/2]$ proposé par Th. Buzug et G. Pfister [11]. La dimension de corrélation D_2 , estimée à l'aide de l'algorithme de P. Grassberger et I. Procaccia [12], est de 2.3 ± 0.2 .

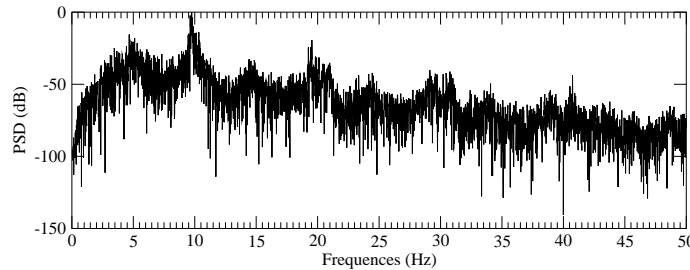


FIG. 9.3 – Spectre de puissance des variations du courant : $f_0 \approx 9.76$ Hz.

La dimension est donc inférieure à trois. Le système peut être décrit par un système de trois équations nonlinéaires. Une représentation dans un espace des états tridimensionnel suffit donc. Toutefois, les techniques de reconstruction n'offrent qu'une projection de cet espace dans un espace euclidien \mathbb{R}^m où m est la dimension de reconstruction. Suivant le théorème de Takens [13], un espace de dimension au moins égale à $2D_2 + 1$ est

requis afin de se prémunir d'éventuelles self-intersections des trajectoires. Cependant, nous avons montré qu'un espace de dimension égale à celle de l'espace original pouvait, sous certaines conditions, être suffisante [14].

Ceci est le cas de l'attracteur étudié ici : aucune self-intersection de la trajectoire violant le principe du déterminisme n'apparaît. L'attracteur peut être décrit en terme de ruban simplement plié comme l'attracteur généré par le système de Rössler. L'attracteur présente une zone centrale non visitée par la trajectoire apériodique : une section de Poincaré peut alors être facilement construite. Elle est définie selon la relation suivante :

$$P \equiv \left\{ (Y_n, Z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid X_n = 44, \frac{\partial X}{\partial Y} < 0 \right\} \tag{9.2}$$

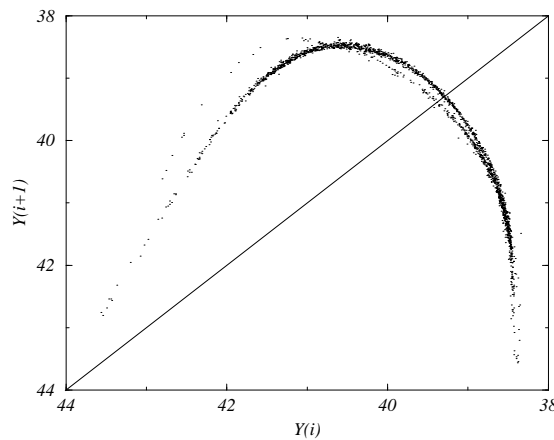


FIG. 9.4 – Application de premier retour à la section de Poincaré P . Le point critique se situe au voisinage de 40.5.

L'application de premier retour de la section de Poincaré P à elle-même est constituée de deux branches monotones, une croissante et une décroissante, et présente un maximum différentiable (Fig. 9.4). Cette propriété de l'application de premier retour permet d'affirmer que la route vers le chaos de ce système est le scénario de doublements de période mis en évidence indépendamment par P. Couillet et C. Tresser [15], d'une part, et M. J. Feigenbaum [16], d'autre part. Nous retrouvons là confirmation des observations de F. Albahadily et M. Schell [9].

Le point critique de l'application de premier retour permet la définition d'une partition sur laquelle est construite une dynamique symbolique. Les orbites périodiques vont ainsi pouvoir être codées suivant la partition suivante :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } Y > 40.6 \\ 1 & \text{si } Y < 40.6 \end{cases} \tag{9.3}$$

9.2.2 Les orbites périodiques

La population d'orbites périodiques est extraite de cet attracteur à partir de la série scalaire temporelle $\{x_n\}_{n=1}^{50000}$ où n est le temps discrétisé sur le pas de temps $\delta t = 0.67$ ms. L'algorithme utilisé est dû à P. Dutertre [17]. Il est basé sur une reconstruction de l'espace des phases par la méthode des décalages et travaille dans une section de Poincaré de l'attracteur ainsi reconstruit. Lorsque l'application de premier retour est correctement définie, c'est à dire qu'elle possède des branches monotones bien évidentes, le codage des orbites à l'aide d'une dynamique symbolique est réalisée automatiquement. La population d'orbites périodiques est reportée dans le tableau (9.1).

Une orbite périodique ξ , ou plus exactement la portion de trajectoire apériodique qui évolue au voisinage d'une orbite périodique, est repérée au sein de la série $\{x_n\}_{n=1}^{50000}$ de la manière suivante :

$$\xi = \{x_n \mid n \in [n_1, n_2]\}$$

TAB. 9.1 – Population d'orbites périodiques extraite à partir d'une série expérimentale de l'évolution de l'intensité du courant traversant l'électrode de cuivre. Les orbites codées par une séquence contenant la syllabe 000 ne sont pas encore apparues. L'apparition de cette syllabe est éminente car l'orbite (1001) qui, selon la dynamique symbolique, apparaît avec l'orbite (1000) est correctement approchée par la trajectoire chaotique.

Période	coordonnées en Y	coordonnées en Z	Séquence	instant n_1	instant n_2
1	41.311704	39.302285	1	45971	46117
2	40.908966	38.542939	10	14109	14412
3	40.922534	38.477819	101	10786	11282
	40.876406	38.371998	100	26991	27508
4	40.894382	38.516484	1011	1796	2407
	40.849273	38.380137	1001	280	983
5	40.854700	38.461538	10111	21857	22643
	40.882174	38.443224	10110	7589	8385
	40.876406	38.371998	10010	26991	27813
	40.830278	38.363856	10011	38380	39198
6	40.927957	38.534796	101110	23741	24665
	40.816714	38.453397	101111	5755	6673
	40.824176	38.400488	100111	47581	48578
	40.854700	38.388277	100110	13409	14412
	40.835708	38.371998	101100	41211	42206

L'orbite est ainsi facilement retrouvée au sein de la série temporelle.

L'extraction des orbites périodiques est particulièrement utile pour la caractérisation des attracteurs. Ainsi N. B. Tuffiaro [18] a montré que le nombre de liaisons $L(N_1, N_2)$ entre deux orbites N_1 et N_2 suffisait à valider un patron, vision schématique de la topologie de l'attracteur. Le nombre de liaisons est défini suivant la relation :

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \sum_p \epsilon_{12}(p) \quad (9.4)$$

où p désigne une intersection entre l'orbite N_1 et l'orbite N_2 dans une projection plane régulière (qui ne présente pas d'intersection entre plus de deux segments d'orbites); les self-intersections ne sont pas prises en compte. $\epsilon_{12}(p)$ est égal à ± 1 suivant la convention standard d'intersection représentée Fig. 9.5 [19].

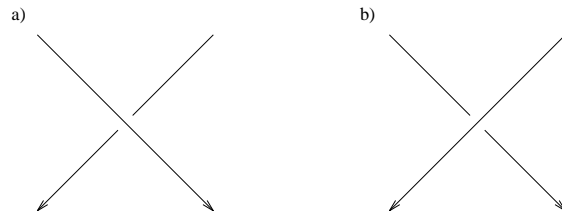


FIG. 9.5 – Convention standard d'intersection : a) croisement positif, b) croisement négatif.

Le nombre de liaisons est estimé avec le couple d'orbites (1,10) représenté Fig. 9.6. Deux intersections positives sont trouvées par consultation de la troisième coordonnée (afin de statuer sur la profondeur respective des orbites). Le nombre de liaisons $L(1, 10)$ est donc égal à +1.

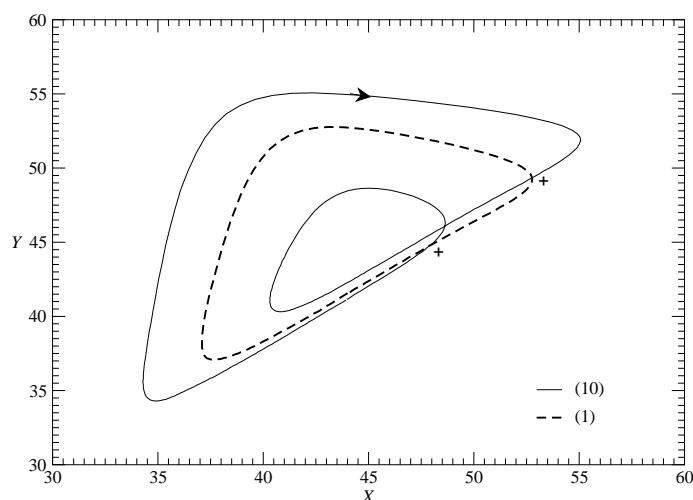


FIG. 9.6 – Projection du couple d’orbites (1,10) : $L(1, 10) = \frac{1}{2}(+2) = +1$.

9.2.3 Le patron

Le patron associé à l’attracteur étudié doit répondre aux conditions suivantes :

- être pourvu de deux bandes (une pour chaque branche monotone) de torsion locale respectivement paire (branche monotone croissante) et impaire (branche monotone décroissante),
- induire un nombre de liaisons $L(1, 10)$ égal à $+1$.

Une inspection de l’attracteur dans l’espace \mathbb{R}^3 permet la construction d’un ruban sur lequel s’inscrit l’attracteur. Nous obtenons alors le ruban représenté Fig. 9.7. Aucune intersection entre les deux bandes n’est à noter. Le patron est donc le plus simple qui puisse être ; il est représenté Fig. 9.8. Il vérifie bien la première condition énoncée précédemment.

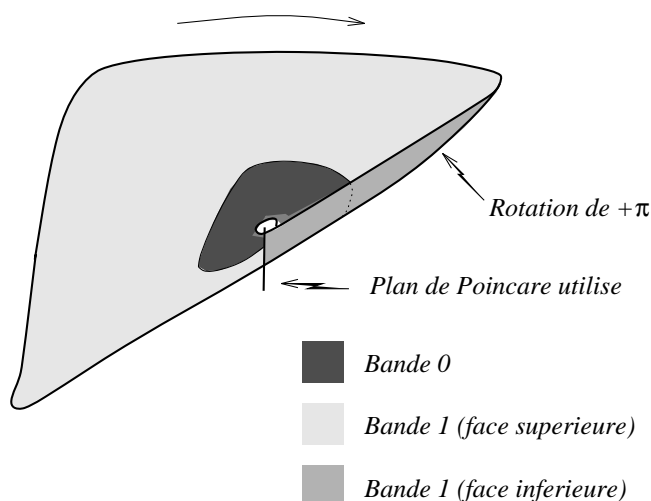


FIG. 9.7 – Ruban modélisant l’attracteur de l’électrolyse du cuivre dans l’acide phosphorique : une bande 0 sans torsion locale et une bande 1 pourvue d’une torsion locale de $+\pi$ sont mises en évidence.

Ce patron peut être décrit algébriquement par la matrice de liaisons suivante :

$$M \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

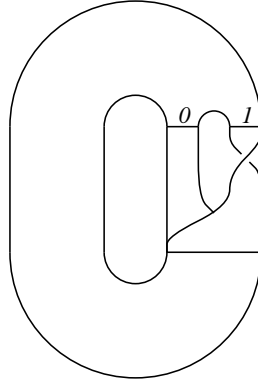


FIG. 9.8 – Patron de l'attracteur de l'électrolyse du cuivre.

où les éléments de la matrice sont définis comme suit :

$$M \equiv \begin{cases} M(i, i) \text{ représente la torsion locale de la bande } i \\ M(i, j) \text{ représente les intersections entre la bande } i \text{ et la bande } j \end{cases}$$

Le patron n'est validé que s'il prédit correctement le nombre de liaisons du couple (1, 10) (par exemple).

9.2.4 Validation algébrique

Il existe une relation algébrique permettant une telle vérification [20]. Soient deux orbites N_1 et N_2 de périodes respectives p_1 et p_2 telles que

$$\begin{cases} N_1 \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p_1}) \\ N_2 \equiv (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{p_2}) \end{cases}$$

où σ_i et τ_j représentent les symboles de la séquence symbolique des orbites considérées. Ainsi, pour l'orbite (10), nous avons :

$$(10) \equiv \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}$$

Le nombre de liaisons $L(N_1, N_2)$ est défini à l'aide de la relation suivante :

$$L(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} M(\sigma_i, \tau_j) + N_{ins}(N_1, N_2) \right] \quad (9.6)$$

où $N_{ins}(N_1, N_2)$ est le nombre d'insertion déterminé à l'aide du graphe représenté Fig. 9.9 [20].

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} L(1, 10) &= \frac{1}{2} [M(1, 1) + 2M(1, 0) + M(0, 0) + 1] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 0 + 0 + 1] \\ &= +1 \end{aligned}$$

Ce nombre de liaisons est égal à celui obtenu Fig. 9.6. Le patron est validé. Nous avons un attracteur dont la structure topologique est celle d'un ruban simplement plié comme l'avait défini O. E. Rössler [10] en vue de modéliser le chaos chimique. Toutefois, le repliement est positif ($+\pi$) au lieu d'être négatif sur le système de Rössler [21].

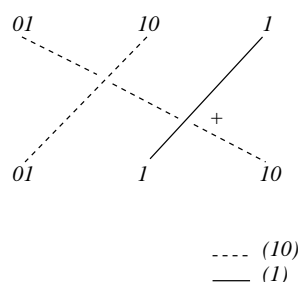


FIG. 9.9 – Graphe d'insertion entre les orbites (1) et (10). La base inférieure est obtenue suivant l'ordre naturel des points périodiques. La base supérieure est obtenue en permutant les points périodiques de la bande 1 (dont la séquence symbolique commence par un 1) car la bande 1 est pourvue d'une torsion locale impaire. Si un nombre d'intersections $M(1,0)$ impair apparaissait entre la bande 0 et la bande 1, les points périodiques de la bande 1 auraient dû être permutés avec ceux de la bande 0. $N_{ins}(1,10) = +1$.

9.3 Electrolyse du Fer

L'analyse de l'électrolyse du fer est réalisée selon la procédure précédente. L'expérience est basée sur un disque de fer de 2.04 mm de diamètre et plongé dans une solution d'acide sulfurique molaire. Le disque est animé d'une rotation de 16.67 ts^{-1} et joue le rôle d'électrode. Une tension statique de -300 mV est appliquée à cette électrode. Le courant $i(t)$, exprimé en milliampère, est mesuré en fonction du temps à la fréquence de 5000 Hz (Fig. 9.10).

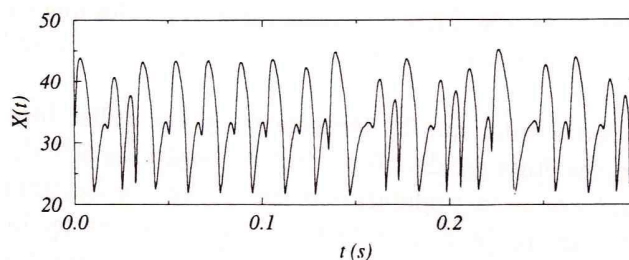


FIG. 9.10 – Evolution de l'intensité du courant traversant l'électrode en fonction du temps.

L'attracteur est représenté Fig. 9.11. Il présente une configuration plus complexe que celui de l'électrolyse du cuivre. Le ruban sur lequel il s'inscrit subit plus de torsions locales.

Le spectre de puissance de l'évolution temporelle de l'intensité est calculé avec 32768 points échantillonnés à la fréquence de 1250 Hz. La fréquence fondamentale se situe autour de 35 Hz (Fig. 9.12). La pseudo-période T_0 de l'attracteur est donc de 28.5 ms. Le pic est beaucoup plus étalé que sur le spectre de l'électrolyse du cuivre (Fig. 9.3). L'épaisseur du pic de fréquence étant liée aux propriétés de cohérence de l'attracteur [22], la cohérence de l'attracteur de l'électrolyse du fer est donc moins évidente que celle de l'électrolyse du cuivre. L'origine de cette perte de cohérence provient des multiples torsions locales que subit l'attracteur. En effet, chaque torsion locale introduit un léger déphasage entre les différentes régions de l'attracteur.

Précisons enfin que le décalage temporel utilisé lors de la reconstruction de l'espace des états est de 1.6 ms soit de l'ordre de 6 % de la pseudo-période T_0 .

Etant donné la configuration très plissée de l'attracteur et l'absence de zone centrale non visitée, il est difficile de construire une section de Poincaré. La section la plus représentative du système a été obtenue suivant la relation

$$P \equiv \left\{ (X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2 \mid X_n = Y, \frac{\partial Y}{\partial X} < 0 \right\} \quad (9.7)$$

L'application de premier retour de la section de Poincaré P à elle-même présente deux branches monotones,

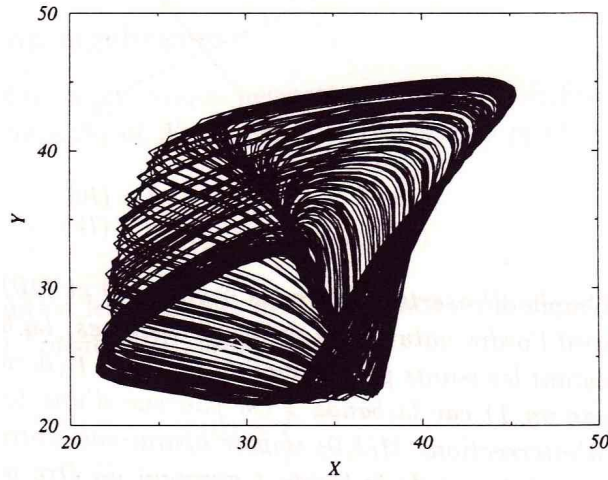


FIG. 9.11 – Attracteur représentatif de l'évolution de l'intensité du courant à travers l'électrode de fer.

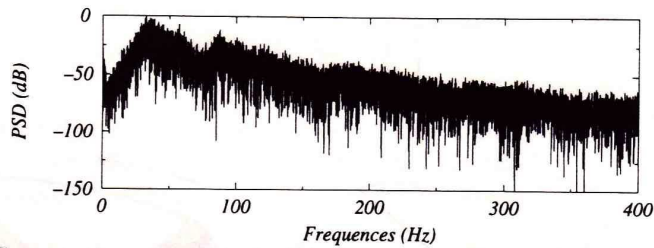


FIG. 9.12 – Spectre de puissance de l'évolution de l'intensité du courant : $f_0 \approx 35$ Hz.

une croissante et une décroissante (Fig. 9.13). Le patron de l'attracteur est donc constitué de deux bandes, une de torsion locale paire et une de torsion locale impaire. Là encore, cette application de premier retour permet d'affirmer qu'il existe une cascade de doublements de période permettant l'accès au chaos. Le point critique est situé au voisinage de 33.5. Les orbites périodiques vont ainsi pouvoir être codées sur une dynamique symbolique binaire.

L'attracteur peut donc être décomposé en deux bandes : une de torsion locale paire, codée par le chiffre 0, et une de torsion locale impaire, codée par le chiffre 1. Ces deux bandes sont représentées sur la Fig. 9.14. Alors que la bande 0 ne subit pas de torsion locale, la bande 1 subit successivement une torsion locale de $+\pi$ et deux de $-\pi$: la somme des torsions locales est donc de $-\pi$. Aucune rotation relative entre les bandes n'est à remarquer.

Le patron est donc constitué d'une bande de torsion nulle et une de torsion locale égale à $-\pi$. En raison de la convention standard d'insertion due à P. Melvin et N. B. Tuffillaro [19], une permutation des bandes doit être ajoutée. Le patron ainsi obtenu est représenté Fig. 9.16. Ce patron est représenté algébriquement par la matrice de liaisons suivante :

$$M_I \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

La vérification de ce patron est réalisée à l'aide d'une projection d'un couple d'orbites périodiques (Fig. 9.15). Le nombre de liaisons $L(1, 10)$ est de -1. La vérification algébrique donne :

$$\begin{aligned} L(1, 10) &= \frac{1}{2} [M(1, 1) + M(1, 0) + N_{ins}(1, 10)] \\ &= \frac{1}{2} [-1 - 1 + 0] = -1 \end{aligned} \quad (9.9)$$

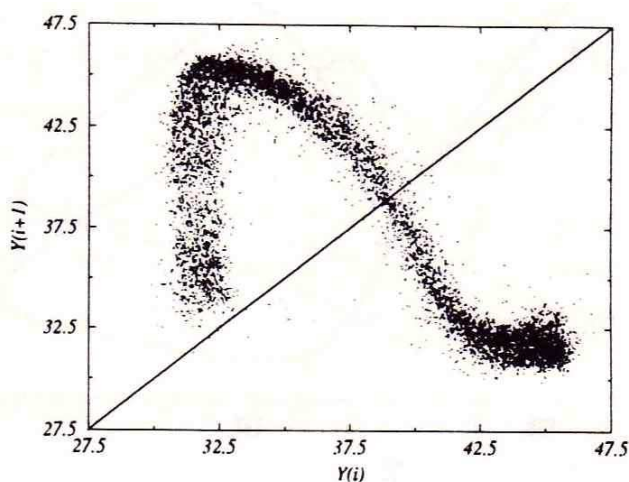


FIG. 9.13 – Application de premier retour à la section de Poincaré P : deux branches monotones apparaissent et définissent deux bandes sur le patron de l'attracteur.

où le graphe d'insertion est identique à celui représenté Fig. 9.9. Le patron est donc validé. Il est identique à celui de l'attracteur de Rössler pour les valeurs usuelles des paramètres de contrôle [21].

9.4 Validation d'un modèle

L'extraction d'un patron est souvent utilisée pour valider un modèle comme ceci a été réalisé par L. Flepp *et al* [23] dans le cas d'un Laser-RMN et par F. Papoff *et al* [24]. La caractérisation topologique a aussi été réalisée à partir de données expérimentales d'une réaction de Belousov-Zhabotinskii [25]. Le patron ainsi extrait pourra être utilisé pour valider un modèle de cette expérience. Dans des cas particuliers tels que celui étudié par F. Argoul *et al* [26], d'autres critères peuvent être utilisés : dans l'exemple de F. Argoul ce sont les propriétés du chaos au voisinage d'une trajectoire homocline qui sont utilisées pour valider le modèle.

Nous souhaitons maintenant confronter les patrons obtenus avec le système de Rössler [10]. En effet, les systèmes chimiques hors équilibre sont souvent gouvernés par des réactions à plusieurs composantes dont les échelles de temps s'échelonnent sur plusieurs ordres de grandeur. Ces différentes échelles de temps impliquent des variétés lentes dans l'espace des états où les trajectoires sont asymptotiquement confinées. En 1976, O. E. Rössler suggère une interprétation intuitive pour expliquer le chaos chimique. Il pensait que le flot, à travers une variété lente plissée, pouvait être continuellement réinjecté dans un petit voisinage d'un point fixe instable. Il construit alors le système de trois équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (9.10)$$

où (a, b, c) sont trois paramètres de contrôle. Lorsque $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$, le comportement asymptotique de ce système s'installe sur un attracteur étrange représenté Fig. 9.17.

La topologie de l'attracteur de Rössler est bien connue [18, 21]. En effet, cet attracteur peut être décrit par un ruban simplement plié, c'est à dire qu'il est constitué d'une simple bande dépourvue de torsion locale et d'une bande subissant une torsion locale de $-\pi$. A chacune de ces bandes nous pouvons associer respectivement l'étirement et le repliement, ingrédients nécessaires au chaos. Le patron de cet attracteur est identique au patron représentatif de l'électrolyse de fer (Fig. 9.16).

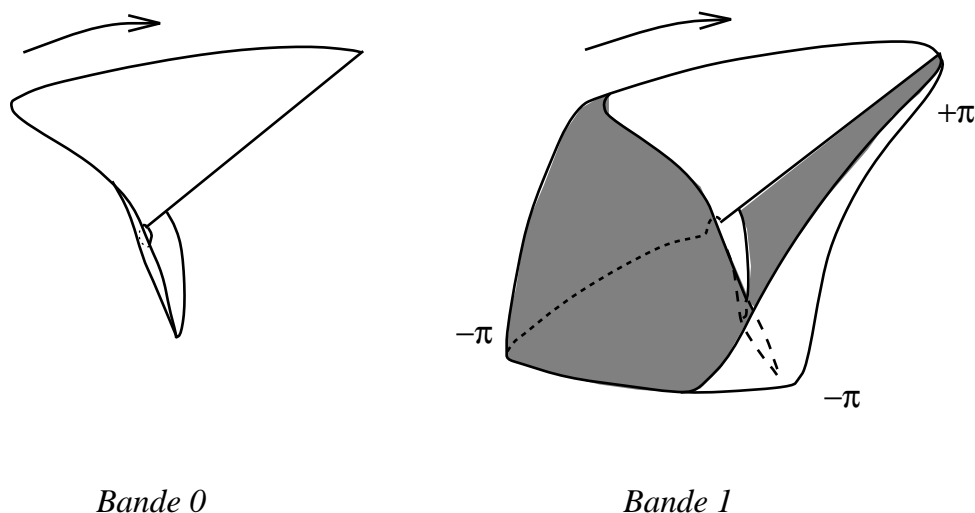


FIG. 9.14 – Extraction des deux bandes de l'attracteur de l'électrolyse du fer.

Si une vision globale de l'attracteur de Rössler à travers le patron ne permet pas de le distinguer de l'attracteur de l'électrolyse de fer, nous avons vu que des torsions locales opposées étaient présentes sur ce dernier. Ces torsions locales, absentes sur l'attracteur de Rössler, ne permettent pas au système de Rössler d'être utilisé comme modèle de cet expérience, et ce, bien que l'organisation des orbites périodiques soient identiques sur les deux attracteurs.

Au contraire, bien que les signes des rotations soient opposés entre l'attracteur de l'électrolyse du cuivre et l'attracteur de Rössler, l'absence de torsions locales supplémentaires permet de considérer le modèle de Rössler comme un modèle valable de l'électrolyse du cuivre. La vision synthétique de l'attracteur réalisée par le patron n'est pas suffisante pour statuer sur la validité d'un modèle. Le patron permet de connaître précisément l'organisation des orbites périodiques et, par conséquent, la mise en évidence d'un ordre d'apparition des orbites périodiques. Précisons que ceci est un enjeu de première importance [27, 29] car la connaissance de l'ordre d'apparition des orbites périodiques devrait permettre de statuer sur l'évolution de l'attracteur sous variation d'un paramètre de contrôle. Une version plus détaillée du patron, prenant en compte l'ensemble des torsions, semble plus propice à la validation d'un modèle. En effet, l'évolution d'une variable ne sera pas identique selon qu'elle induit des torsions locales ou non (comparez l'évolution de la variable y du système de Rössler, Fig. 9.18, avec celle de l'électrolyse du fer, Fig. 9.10).

La configuration de l'attracteur de l'électrolyse du cuivre est plus proche de celle du système de Rössler. Notamment, la configuration laisse présager d'une situation homocline lorsque le chaos est légèrement plus développé. Une analyse à la "Sil'nikov" [4] permettrait alors de valider complètement le modèle de Rössler pour cette expérience.

Comme en présence de symétrie centrale qui renverse le signe des rotations [30], le signe des rotations n'apparaît pas être de première importance pour la validation d'un modèle.

9.5 Conclusion

La caractérisation topologique de deux électrolyses a été réalisée. Nous avons montré que le patron ne pouvait suffire à valider un modèle, au moins dans sa version synthétique : une version étendue pourrait être envisagée. Les torsions locales opposées, qui s'annulent donc sur le patron, doivent être prises en compte car elles jouent un rôle prépondérant dans l'évolution de variables sur lesquelles est décrit l'attracteur. Une connection reste à établir entre l'évolution d'un attracteur sous variation d'un paramètre de contrôle et la présence ou non de torsions locales opposées.

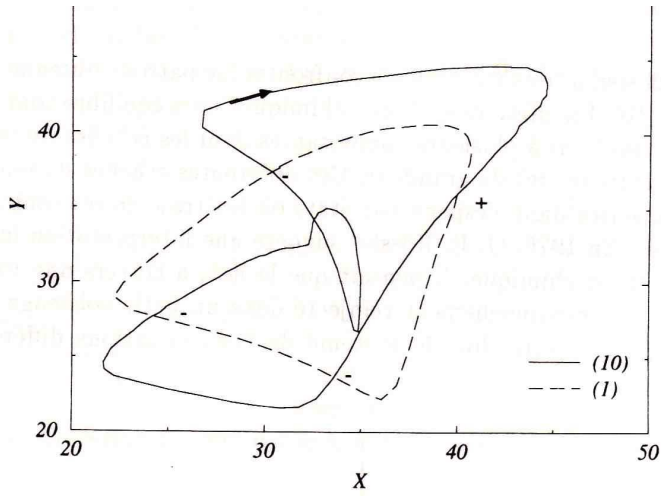


FIG. 9.15 – Projection d’une paire d’orbites périodiques de l’attracteur de l’électrolyse du fer : $L(1, 10) = -1$.

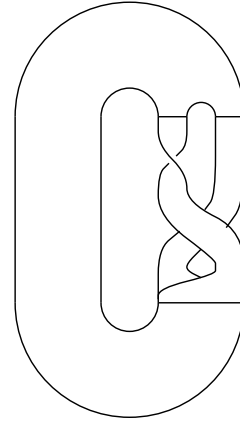


FIG. 9.16 – Patron de l’attracteur de l’électrolyse du fer.

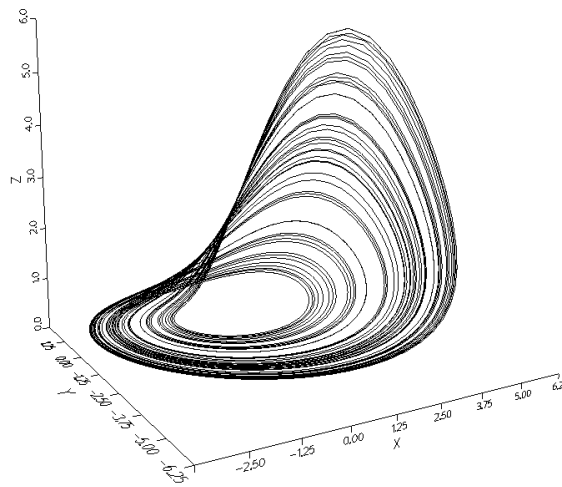


FIG. 9.17 – Attracteur de Rössler : $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$.

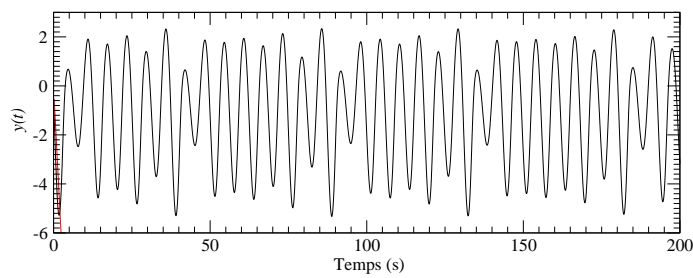


FIG. 9.18 – Evolution temporelle de la variable y du système de Rössler.

Bibliographie

- [1] **R. J. Field, E. Korös, R. M. Noyes.** *The Journal of American chemical Society*, 94, p. 8649, 1972.
- [2] **J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal.** Representation of strange attractor from an experimental study of chemical turbulence, *Physics Letters*, 77A, pp. 391-393, 1980.
- [3] **J. L. Hudson, J. C. Mankin.** Chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Journal of Chemical Physics*, 74, pp. 6171-6177, 1981.
- [4] **A. Arnéodo, F. Argoul, J. Elezgaray, P. Richetti.** Homoclinic chaos in chemical systems, *Physica D*, 62, 134-169, 1993.
- [5] **G. B. Mindlin, R. Gilmore.** Topological analysis and synthesis of chaotic time series, *Physica D*, 58, pp. 229-242, 1992.
- [6] **M. R. Bassett, J. L. Hudson.** Quasi-periodicity and chaos during an electrochemical reaction, *The Journal of Physical Chemistry*, 93, pp. 2731-2737, 1989.
- [7] **M. R. Bassett, J. L. Hudson.** The oscillatory electrodisolution of Copper in Acidic Chloride Solution, *Journal of the Electrochemical Society*, 137 (6), pp. 1815-1826, 1990.
- [8] **M. C. Kube, S. T. Pride, J. L. Hudson.** Local analysis of time series from the oscillatory electrocatalytic reduction of Hydrogen Peroxide, *Chaos, Soliton & Fractals*, 3 (5), pp. 495-507, 1993.
- [9] **F. Albahadily, M. Schell.** *Journal of Chemical Physics*, 88, p. 4312, 1988.
- [10] **O. E. Rössler.** An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters*, 57A (5), pp.397-398, 1976.
- [11] **Th. Buzug, G. Pfister.** Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors, *Physical Review A*, 45 (10), pp. 7073-7984, 1992.
- [12] **P. Grassberger, I. Proccacia.** Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica D*, 9, pp. 189-198, 1983.
- [13] **F. Takens.** Detecting Strange Attractors in Turbulence, in : *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, eds. D. A. Rand and L. S. Young, pub. Springer-Verlag, New York, pp. 366-381, 1981.
- [14] **C. Letellier, G. Gouesbet.** Topological equivalence between reconstructed and original strange attractors, submitted to *Physical Review E*.
- [15] **P. Couillet, C. Tresser.** Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *Journal de Physique*, Colloque C5, supplément au n°8 (39), pp. C5-25, 1978.
- [16] **M. J. Feigenbaum.** Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformation, *Journal of Statistical Physics*, 19 (1), pp. 25-52, 1978.
- [17] **P. Dutertre.** *Caractérisation d'attracteurs étranges par leur population d'orbites périodiques*, Thèse de troisième cycle, en préparation.
- [18] **N. B. Tufillaro, T. Abbott, J. Reilly.** *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, New York, 1992.
- [19] **P. Melvin, N. B. Tufillaro.** Templates and Framed Braids, *Physical Review A*, 44 (6), pp. 3419-3422, 1991.

- [20] **L. Le Sceller, C. Letellier, G. Gouesbet.** Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractor, to be published in *Physical Review E*, 49 (5), May 1994.
- [21] **C. Letellier, P. Dutertre, B. Maheu.** Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, à paraître dans *Chaos*, 1994.
- [22] **J. D. Farmer, J. P. Crutchfield, H. Frøeling, N. H. Packard, R. S. Shaw.** Power Spectra and Mixing properties of Strange Attractors. *Annals N. Y. Academy of Sciences*, 357, pp. 453-472, 1980.
- [23] **L. Flepp, R. Holzner, E. Brun, M. Finardi, R. Badii.** Model identification by periodic-orbit analysis for NMR-laser chaos, *Physical Review Letters*, 67 (17), pp. 2244-2247, 1991.
- [24] **F. Papoff, A. Fioretti, E. Arimondo, G. B. Mindlin, H. Solari, R. Gilmore.** Structure of chaos in the laser with saturable absorber, *Physical Review Letters*, 68 (8), pp. 1128-1131, 1992.
- [25] **G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, X. J. Hou.** Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski, *Journal of Nonlinear Sciences*, 1, pp. 147-173, 1991.
- [26] **F. Argoul, A. Arnéodo, P. Richetti.** Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Physics Letters*, 120 A (6), pp. 269-275, 1987.
- [27] **T. Hall.** Weak universality in two-dimensional transitions to chaos, *Physical Review Letters*, 71 (1), pp. 58-61, 1993.
- [28] **N. B. Tuffillaro.** Braid analysis of (low-dimensional) chaos, *preprint*, July 1993.
- [29] **G. B. Mindlin, R. López-Ruiz, H. G. Solari, R. Gilmore.** Horseshoe implications, *Physical Review E*, 48 (6), pp. 4297-4304, 1993.
- [30] **C. Letellier, G. Gouesbet.** Topological characterization of a system with a central symmetry, submitted to *Physical Review E*.

Chapitre 10

Conclusion

Au cours de cet ouvrage, nous avons largement utilisé les propriétés topologiques des attracteurs ; non seulement dans leur caractérisation mais aussi dans la détermination de l'équivalence entre un attracteur reconstruit et un attracteur original. Ainsi, nous avons étudié les mécanismes de croissance de l'attracteur de Rössler. Ce type d'étude se révèle d'un intérêt tout particulier dans la mesure où, à l'instar des routes vers le chaos, elle permet une certaine prédiction des comportements possibles du système étudié sous des variations de ses paramètres de contrôle. Par exemple, si un physicien retrouve un attracteur du type de celui généré par le système de Rössler, il existe une probabilité non négligeable pour que, sous des variations du paramètre de contrôle de son système expérimental, il observe une évolution analogue à celle observée sur le système de Rössler. Il saura au moins quels types de comportement seront interdits.

La caractérisation topologique a révélé toute sa finesse dans la distinction des divers régimes de chaos, finesse inaccessible par des techniques d'analyse plus traditionnelles comme les spectres de puissance ou l'analyse géométrique (calcul de dimension, d'exposants de Lyapunov, ...). Elle permet notamment de dégager divers processus dynamiques responsables de l'évolution du système. Ainsi, le patron du système de Lorenz permet de dégager clairement des processus dynamiques différents : une bande correspond à l'ascension des courants chauds et l'autre à une phase d'ascension des courants froids. Toutefois la connection systématique entre topologie et processus physique ne peut être établie ; cette connection sera nécessairement étroitement liée au système étudié. Malheureusement cette puissante technique de caractérisation nécessite de travailler dans un espace tridimensionnel, seul espace dans lequel est définie la théorie des nœuds. La généralisation de cette technique passe donc par la réalisation d'une théorie des nœuds dans des espaces de dimension supérieure à 3. Il existe cependant des conjectures permettant, sous certaines conditions (unidimensionalité de la variété instable, par exemple), de se ramener à un espace à trois dimensions. De plus, les tores, sur lesquels s'inscrivent tout système résultant de l'interaction de plusieurs fréquences fondamentales, n'ont pas encore fait l'objet d'une étude topologique. Les raisons de cette disgrâce proviennent de l'absence de systèmes simples permettant la mise en place de la procédure de caractérisation.

L'application de la caractérisation topologique aux systèmes symétriques a impliqué au cours de cet ouvrage une remise en question de l'approche de tels systèmes. En effet, nous avons montré pourquoi une observable équivariante (qui tient compte des propriétés de symétrie) ne fournit pas une information pertinente sur la dynamique du système étudié. Notamment, un spectre de puissance calculé sur une observable équivariante ne fournit pas la bonne fréquence fondamentale.

L'utilisation de la caractérisation topologique s'est aussi révélée un précieux outil dans la détermination de la nature de l'équivalence entre un attracteur reconstruit et l'attracteur original. Pour cela, l'existence d'expressions analytiques entre l'attracteur reconstruit par la technique de reconstruction utilisant les dérivées temporelles et l'attracteur original a largement facilité ce travail. L'équivalence entre les différents systèmes de coordonnées de l'espace reconstruit (les coordonnées par décalage temporel, les coordonnées de Legendre et les dérivées) permet ensuite de passer d'une méthode à l'autre. Cela nous a permis de justifier la reconstruction dans un espace de dimension égale à celle de l'espace original. Bien qu'il se puisse qu'un espace de reconstruction de dimension aussi basse ne permette pas une équivalence topologique, il est probable qu'une reconstruction topologiquement

équivalente (qui, précisons le, est suffisante pour récupérer toute l'information sur la dynamique) puisse être envisagée dans des espaces dont la dimension est largement inférieure à celle requise par le théorème de Takens.

Si nous savons caractériser un attracteur, sa reconstruction se heurte encore à quelques problèmes qui font obstacle à l'application de telles méthodes aux systèmes expérimentaux. Cependant, bien que notre méthode, basée sur l'utilisation des dérivées temporelles, souffre de difficultés liées à l'approximation des dérivées, elle n'en possède pas moins toutes les qualités requises pour une bonne compétitivité. Sa grande originalité réside dans la possibilité d'extraire des expressions analytiques entre le portrait de phase et le portrait original. De plus, elle ne nécessite aucune hypothèse *ad hoc* comme certaines de ses concurrentes. Comme elle utilise toute l'information locale disponible par l'intermédiaire des dérivées, elle ne requiert pas une grande exploration de l'espace des phases et seule la connaissance d'une orbite de période 1 suffit à reconstruire l'ensemble de l'espace des phases. Nous pensons que de telles possibilités sont l'apanage des méthodes différentielles.

L'amélioration de l'estimation des dérivées est d'ores et déjà mise en œuvre. L'utilisation d'une base de polynômes de Legendre devrait permettre un meilleur comportement face au bruit ; en effet, parce que les dérivées sont estimées indépendamment les unes des autres, le bruit ne devrait pas être amplifié au sein des dérivées successives. La robustesse de l'approximation du champ de vecteurs devra aussi être améliorée. Le débat est encore très ouvert sur ce sujet car il n'est pas facile de statuer sur les qualités et les défauts de telle ou telle méthode. Une méthode de détermination des meilleurs paramètres de reconstruction à l'aide de fonctions d'estimation d'erreur est en cours d'implantation : elle devrait permettre un choix plus rapide de ces paramètres.

Nous avons développé au cours de ce mémoire quelques outils de la dynamique des systèmes qui permettent d'apporter une contribution à l'étude de signaux expérimentaux issus de domaines variés. Ainsi une approche par la dynamique des systèmes des schémas réactionnels de combustion permet une connaissance rapide des divers types de comportements possibles. Ils devraient pouvoir aider à la caractérisation d'électro-cardiogrammes, à la maîtrise des réactions chimiques par des techniques de contrôle. L'application aux plasmas, à la biologie, aux analyses optiques où l'évidence des comportements chaotiques n'est plus à démontrer, n'est plus une utopie...