

Analyse de dynamiques chaotiques : une nouvelle approche de l'activité solaire

Christophe Letellier et Jean Maquet

CORIA, UMR 6614, Université et INSA de Rouen, BP 12,
76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex
Christophe.Letellier@coria.fr

Les processus physiques sont très souvent non linéaires et c'est naturellement qu'ils peuvent être désormais abordés dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. Plus que de nouvelles techniques d'analyse qui viendraient simplement s'ajouter à d'autres, c'est une nouvelle manière de voir les comportements dynamiques que propose la « théorie du chaos » : les fluctuations apparemment irrégulières se révèlent ordonnées dans l'espace des phases, et des modèles relativement simples, au regard de la physique impliquée, peuvent être obtenus. Nous proposons un exemple d'application de ces techniques dans le contexte de l'activité solaire étudiée à partir du nombre de taches solaires. Nous montrons ainsi que la dynamique sous-jacente est de nature déterministe avec un petit nombre de degrés de liberté ; elle est de nature chaotique.

Introduction

Une fois l'évolution temporelle d'une grandeur physique mesurée, il est de première importance de caractériser le comportement dynamique sous-jacent. La plupart des techniques classiques utilisent la série temporelle elle-même et fournissent une réponse en termes de spectre de Fourier, de fonctions d'auto-corrélations, etc. Lorsque les processus physiques sous-jacents sont suffisamment compris, un modèle phénoménologique peut être construit et comparé aux données expérimentales. Ces approches fonctionnaient relativement bien dans le cas où les comportements dynamiques pouvaient se décrire, soit en termes de combinaisons de différents modes, soit en termes de processus aléatoires. Avec les systèmes dynamiques non linéaires, les comportements peuvent être relativement compliqués, mais certains présentent finalement la propriété d'être très structurés, bien qu'imprévisibles à long terme, et de pouvoir être décrits en termes d'attracteurs¹ dans l'espace des phases (défini sur l'ensemble des

variables nécessaires à la description complète de l'état du système). Toutefois, ils peuvent souvent être décrits par un modèle basé sur un petit nombre de degrés de liberté.

La théorie des systèmes dynamiques non linéaires a pour objectif le développement de techniques d'analyse permettant de caractériser finement les comportements chaotiques et, par conséquent, de les distinguer des processus aléatoires. La rupture avec les techniques usuelles est réalisée par le fait que ce n'est plus l'évolution d'une grandeur physique qui est analysée, mais la représentation d'une trajectoire dans l'espace des phases reconstruit à partir de cette évolution. L'espace des phases est le concept clé de cette approche : c'est lui qui peut révéler la possible structure sous-jacente des irrégularités constatées selon l'évolution temporelle. Le temps devient alors implicite dans la description : on peut dire que l'on change de niveau de description. Selon la conception platonicienne, seules les structures permanentes peuvent être décrites. Les fluctuations temporelles observées à l'échelle de la série temporelle se traduisent par un attracteur, invariant sous l'action du temps : l'attracteur est un objet permanent, donc descriptible.

Le second apport significatif de cette approche est qu'il est désormais possible d'obtenir des systèmes d'équations qui reproduisent le comportement dynamique directement à partir de la reconstruction du portrait de phase² : en d'autres termes, il n'est pas nécessaire d'avoir une compréhension *a priori* des processus sous-jacents pour obtenir un modèle. L'obtention de tels modèles constitue une preuve forte du caractère déterministe de la dynamique étudiée (ou plus justement, la nature déterministe du système est observable) ; elle peut constituer une preuve que quelques degrés de liberté sont suffisants pour décrire complètement les processus physiques impliqués. Bien sûr, l'utilisation de ces modèles pour une interprétation physique est assez incertaine en raison du grand nombre de termes impliqués, bien que diverses techniques de réduction de la complexité de ceux-ci (nombre de termes, ordre des non-linéarités) laissent entrevoir quelques possibilités.

Nous présentons ici un exemple d'application de la théorie du chaos au cas de l'évolution séculaire de l'activité solaire étudiée à partir de l'évolution du nombre de taches solaires.

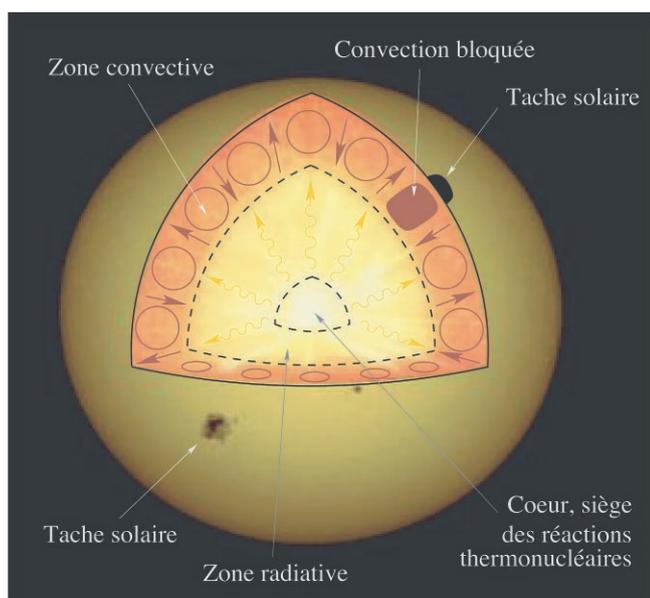


Figure 1 : Le Soleil est d'abord constitué d'un cœur, siège des réactions thermonucléaires, où l'hydrogène est consommé. L'énergie dégagée par les réactions thermonucléaires est évacuée par rayonnement vers la périphérie du Soleil : c'est la zone radiative. Enfin, de la convection se développe au niveau de la couche externe. Les taches solaires résultent du blocage de la convection par des champs magnétiques intenses.

1. Un attracteur peut être vu comme un ensemble asymptotique de trajectoires qui est invariant sous l'action du temps : une fois sur l'attracteur, la trajectoire ne peut plus jamais en sortir.

2. Le portrait de phase est constitué de l'ensemble des trajectoires solutions du système représentées dans l'espace des phases.

Variabilité de l'activité solaire

Physique du Soleil et taches solaires

Au sein du cœur du Soleil, région occupant un quart du rayon solaire (695 990 km), des réactions thermonucléaires produisent de l'énergie qui est rayonnée sous forme de photons à travers la zone radiative (figure 1). L'énergie est ensuite transportée par des cellules de convection dont le sommet vient mourir à la base de l'atmosphère solaire : c'est la zone convective, d'environ 140 000 km d'épaisseur. Ces cellules ont des tailles variant de 700 à 1000 kilomètres. Chacune apparaît comme une zone claire entourée d'une zone plus sombre, donc plus froide, et persiste durant cinq à dix minutes. La zone où sont émis les photons qui nous arrivent directement est très mince (500 kilomètres d'épaisseur) : c'est la photosphère. La surface du Soleil est en fait granuleuse et parsemée de taches noires – dont la température peut être jusqu'à 2000 K plus « froide » que la température des zones les plus brillantes. Ces taches peuvent persister quelques heures ou quelques mois. Au-dessus des taches solaires, des éruptions ont fréquemment lieu : des bouffées de particules sont alors éjectées, donnant lieu à des vents solaires.

Les taches solaires résultent de la concentration de forts champs magnétiques perçant la photosphère solaire et bloquant la convection : elles sont la signature de températures plus faibles. En 1843, après 17 ans d'observations, Schwabe découvre la croissance et la décroissance en fonction du temps du nombre moyen de taches visibles à la surface du Soleil, avec une période qu'il estime à une dizaine d'années. En 1846, Wolf se lance dans la reconstitution des observations des années passées afin de vérifier l'hypothèse de Schwabe. Afin de rendre comparables les observations réalisées par différents astronomes utilisant des techniques d'observations variées, Wolf introduit le *nombre de taches* à la surface du Soleil :

$$N_s = k (N_t + 10 N_g)$$

où N_t est le nombre de taches individuelles, N_g le nombre de groupes de taches et k une constante de normalisation qui varie d'un observateur à l'autre (k étant égale, par définition, à 1 pour les propres observations de Wolf). Wolf estime ainsi qu'en moyenne, un groupe de taches contient une dizaine de taches solaires. Le nombre de groupes de taches est introduit car il est parfois difficile de distinguer les taches les unes des autres. Wolf reconstitue le nombre de taches solaires à partir de 1755. Les 23 cycles actuellement disponibles ont une période moyenne de 11,1 ans (figure 2)³.

Les fluctuations observées sur le nombre de taches solaires témoignent d'une activité solaire variable. En effet, le nombre de ces taches dépend directement de l'intensité du champ magnétique. Deux photographies du Soleil, respectivement à un minimum et à un maximum d'activité, sont représentées sur la figure 3.

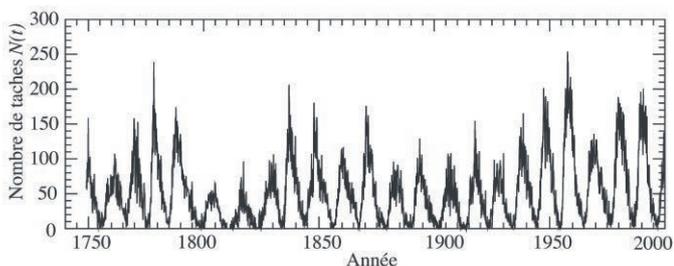


Figure 2 : Évolution du nombre de taches solaires sur le disque solaire visible de la Terre.

3. Les données utilisées ici peuvent être obtenues sur le site : <http://science.msfc.nasa.gov>.

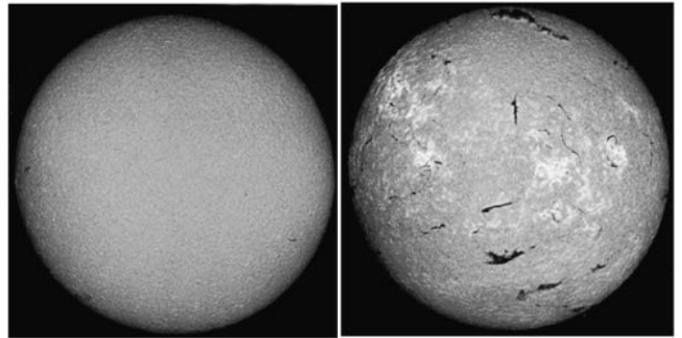


Figure 3 : Relation entre l'activité solaire et le nombre de taches solaires. (a) Minimum d'activité. (b) Maximum d'activité. La photographie (b) donne une idée de la « précision toute relative » du comptage des taches. (National Solar Observatory / Sacramento Peak. New Mexico, USA.)

En 1919, Hale et ses collaborateurs découvrent que la polarité du champ magnétique solaire s'inverse à chaque cycle. Ce phénomène est expliqué en 1961 par le modèle de la dynamo de Babcock [1]. Bien que les principaux aspects du cycle solaire soient bien expliqués par ce modèle, le caractère chaotique des inversions du champ magnétique solaire n'est toujours pas clairement établi.

Reconstruction du portrait de phase

L'un des résultats les plus marquants de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires consiste à représenter l'évolution du système non plus en fonction du temps, comme c'est le cas pour l'évolution du nombre de taches solaires (figure 2), mais comme une trajectoire dans un espace défini par l'ensemble des variables nécessaires à la description complète de l'état du système. Lorsque les équations différentielles sont connues, Henri Poincaré a montré que l'espace devait être défini sur l'ensemble des variables dynamiques apparaissant dans ces équations. Dans le cas d'un système expérimental ou naturel, ces équations ne sont pas connues et les variables ne sont ni mesurables ni même connues : la plupart du temps, nous devons nous contenter d'une seule variable.

Intervient alors ce qu'on appelle la reconstruction de l'espace des phases : cela consiste à obtenir un jeu de variables, dites indépendantes, à partir de la variable mesurée que nous désignerons par $x(t)$. Deux systèmes de coordonnées peuvent être utilisés pour obtenir ces variables indépendantes :

- les coordonnées décalées telles que : $\{x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (m-1)\tau)\}$
- les coordonnées dérivées telles que : $\{x(t), dx/dt, d^2x/dt^2, \dots, d^{m-1}x/dt^{m-1}\}$

où m est le nombre de variables nécessaires à la description complète du système. Les coordonnées décalées ou dérivées permettent donc, à partir de la seule connaissance d'une variable, de tracer une trajectoire aux propriétés équivalentes à celle observée dans l'espace des phases original : c'est le *portrait de phases*.

Dans le cas de l'activité solaire, la variable mesurée correspond au nombre de taches solaires $N(t)$. Une projection plane de l'espace des phases peut être reconstruite à l'aide des coordonnées décalées. La dimension de l'espace des phases doit être suffisante pour que la trajectoire ne se coupe pas avec elle-même. Si jamais elle se coupait avec elle-même, la trajectoire aurait deux futurs possibles à partir d'un état présent, ce qui serait en contradiction avec le principe du déterminisme. En augmentant progressivement la dimension, nous avons observé qu'une trajectoire pouvait être correctement représentée dans un espace à trois dimensions, c'est-à-dire qu'à chaque instant, l'état du Soleil est représenté par un point de coordonnées $\{x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau)\}$. En effet, un théo-

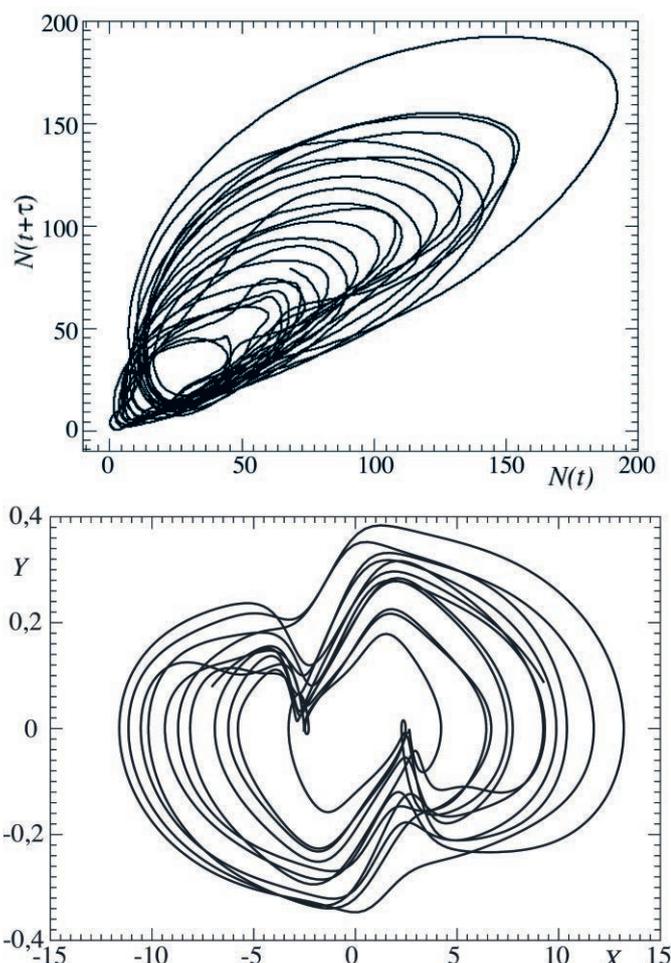


Figure 4 : (a) Projection plane du portrait de phase reconstruit à partir des coordonnées $N(t)$ et $N(t+\tau)$, où $\tau = 15$ mois. Le décalage τ correspond à peu près à un huitième de la période moyenne des cycles solaires, ce qui est inférieur au quart de cette période, valeur maximale habituellement utilisée. La troisième dimension (non représentée) correspond à la quantité $N(t+2\tau)$. La trajectoire ne ressemble pas à une « pelote de laine » et une structure se dessine. (b) Une version avec une symétrie est obtenue de manière à tenir compte de l'inversion du champ magnétique à chaque cycle.

rème dû à Floris Takens garantit l'équivalence entre un tel portrait de phase et le portrait de phase original (inaccessible par l'observation). L'évolution de l'activité solaire est ainsi représentée sous la forme d'une trajectoire telle que celle obtenue figure 4a. Puisque l'espace des phases se construit sur les variables impliquées dans les équations différentielles régissant l'évolution du système, dire qu'un espace de dimension trois est suffisant signifie qu'un jeu de trois équations différentielles ordinaires pourrait être suffisant pour décrire l'activité solaire.

Hale et ses collaborateurs ont montré que le champ magnétique s'inversait à chaque cycle, ce qui se traduit par des propriétés de symétrie, non présentes dans le portrait de phase de la figure 4a. Un changement de variables permet d'introduire une telle symétrie (figure 4b) [2]. Ce changement de coordonnées correspond à une rotation d'un angle π autour d'un axe passant au milieu de la zone non visitée au milieu de l'attracteur [3]. Le changement de variables correspond donc à l'inverse de la transformation [2] :

$$N(t) - 30 = u^2 - y^2, \quad N(t+\tau) - 30 = 2uv.$$

La projection du portrait de phase (figure 4b) utilise la variable $X = u$ et sa dérivée première $Y = dX/dt$, comme cela est requis par la méthode de modélisation décrite ci-dessus. Ainsi, $X > 0$ correspond à une polarité et $X < 0$ à la polarité opposée.

Obtention d'un système d'équations différentielles

En utilisant les dérivées successives telles que $X, Y = dX/dt$ et $Z = dY/dt$, un jeu de trois équations différentielles ordinaires prend nécessairement la forme :

$$dX/dt = Y, \quad dY/dt = Z, \quad dZ/dt = F(X, Y, Z)$$

où la fonction $F(X, Y, Z)$ est la fonction à estimer numériquement à partir des dérivées successives ($dX/dt, dY/dt, dZ/dt$) de la variable X . Une méthode de moindres carrés un peu sophistiquée [4] permet d'estimer les coefficients K_p de la fonction $F(X, Y, Z)$ prise sous la forme la plus générale possible, soit :

$$F(X, Y, Z) = K_0 + K_1X + K_2Y + K_3Z + K_4X^2 + K_5XY + K_6Y^2 + K_7XZ + \dots$$

Une fois les coefficients K_p estimés numériquement, il ne reste qu'à intégrer le système différentiel précédent. De telles techniques ont été développées et appliquées à des données expérimentales [5, 6, 7] depuis le début des années 90, mais leurs applications aux nombres de taches solaires ont toujours échoué pour deux raisons. La première est l'introduction des propriétés de symétrie en inversant le signe d'un cycle sur deux comme l'avait proposé Bracewell en 1953 ; mais nous avons montré que cette symétrisation était inadéquate et introduisait une rupture du déterminisme [8]. La deuxième est que l'ensemble des données depuis 1750 était toujours utilisé. Or les données ne sont pas de qualité uniforme : elles sont issues de moyennes annuelles entre 1700 et 1749, puis de moyennes mensuelles jusqu'en 1818, année à partir de laquelle l'utilisation d'un indice quotidien est introduite. De plus, l'évolution des taches solaires antérieures à 1850 a été reconstruite *a posteriori* par Wolf à partir d'observations d'origines diverses. Nous devons donc considérer les données antérieures à 1850 comme peu fiables et n'utiliser que celles postérieures à cette date.

En utilisant les 2,5 cycles observés juste après 1850, nous avons obtenu une fonction $F(X, Y, Z)$ conduisant à un attracteur chaotique comme solution du modèle obtenu (figure 5). Il présente une structure qui reproduit la plupart des caractéristiques des cycles utilisés pour l'estimation. Comme souvent pour les modèles obtenus à partir de données de qualité réduite, la dynamique n'est pas aussi développée que la dynamique originale, c'est-à-dire que les oscillations des modèles sont d'amplitude moindre que celles des observations : ceci résulte directement de composantes aléatoires présentes dans les données et qui ne peuvent être modélisées par un système déterministe. Nous avons montré que le comportement solution du modèle était chaotique. En fait, le

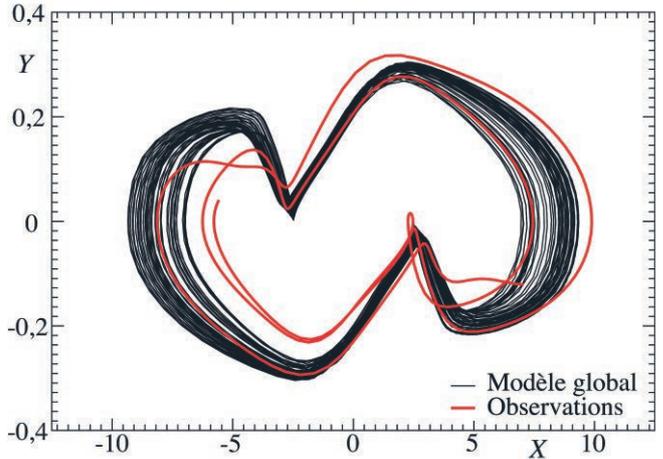


Figure 5 : Projection plane du portrait de phase solution du système de trois équations différentielles obtenu. Le modèle est capable de reproduire des fluctuations semblables à celles des données utilisées pour son estimation. La fonction estimée est un polynôme constitué de 34 termes de la forme $K_p X^i Y^j Z^k$, et dont la somme des exposants $i+j+k$ est impaire.

chaos ainsi identifié résulte d'une cascade de doublements de période, l'une des routes vers le chaos les plus fréquemment observées⁴. L'activité séculaire du Soleil pourrait donc résulter d'une dynamique chaotique.

En effet, le grand intérêt d'un tel modèle est qu'il permet de produire un grand nombre de cycles (correspondant à plusieurs siècles d'observations) qui permettent alors une analyse topologique, impossible à faire sur les observations. Ainsi, non seulement la structure de la dynamique peut être obtenue mais encore l'existence de ce modèle montre que la dynamique est régie par un petit nombre de degrés de liberté. Dans le cas présent, l'analyse du modèle montre que la topologie de l'attracteur sous-jacent est du type de l'attracteur chaotique du système de Rössler [9].

Conclusion

Le cœur de la théorie du chaos réside dans la reconstruction du portrait de phase qui permet d'accéder à la structure du comportement apparemment irrégulier. Le portrait de phase permet une caractérisation très fine de la dynamique. Accéder à la structure du comportement, c'est réaliser un premier pas vers des indications particulièrement importantes pour la compréhension des processus physiques sous-jacents. Lorsque les données ne sont pas en quantité suffisante pour permettre une telle analyse, la solution consiste à obtenir un modèle global – un système d'équations différentielles ordinaires – qui permet de reproduire la dynamique sous-jacente aux données : il suffit de laisser courir l'intégration numérique de ces équations pour disposer d'un nombre de cycles suffisant pour une analyse de la structure topologique de l'attracteur. Le prix à payer est que les dérivées successives et la structure quelque peu compliquée de la fonction estimée ne permettent pas de remonter aux processus physiques. Toutefois, puisque la structure de la dynamique sous-jacente à l'activité solaire est maintenant accessible, les solutions du modèle peuvent être utilisées pour valider les modèles construits sur la base d'une analyse des processus physiques – l'effet dynamo – proposés pour l'activité solaire.

Remerciements

Nous tenons à remercier Luis Aguirre, R. Gilmore et Thierry Dudok de Wit pour les nombreuses discussions sur les taches solaires. Nous remercions également Arnaud Bultel pour nous avoir encouragé à écrire cet article.

Références

- [1] H.W. Babcock, "The topology of the Sun's magnetic field and the 22-year cycle", *The Astrophysical Journal*, **133** (1961) 572.
- [2] C. Letellier & R. Gilmore, "Covering dynamical systems: Two-fold covers", *Physical Review E* **63**, (2001) 16206.
- [3] R. Gilmore & C. Letellier, *The Symmetry of Chaos*, Oxford University Press, à paraître.
- [4] C. Letellier, J. Maquet, L. A. Aguirre & R. Gilmore, "Evidence for low dimensional chaos in the sunspot cycles", *Astronomy & Astrophysics*, **449** (2006) 379.
- [5] G. Gouesbet & C. Letellier, "Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets", *Physical Review E* **49** (1994) 4955.
- [6] C. Letellier, L. Le Sceller, P. Dutertre, G. Gouesbet, Z. Fei & J. L. Hudson, "Topological characterization and global vector field reconstruction from an experimental electrochemical system", *Journal of Physical Chemistry A* **99** (1995) 7016.
- [7] C. Letellier, L. Le Sceller, G. Gouesbet, F. Lusseyran, A. Kemoun & B. Izrar, "Recovering deterministic behavior from experimental time series in a standard mixing reactor", *AIChE Journal*, **43** (1997) 2194.
- [8] C. Letellier, J. Maquet, H. Labro, L. Le Sceller, G. Gouesbet, F. Argoul & A. Arnéodo, "Analyzing chaotic behaviour in a Belousov-Zhabotinskii reaction by using a global vector field reconstruction", *Journal of Physical Chemistry A*, **102** (1998) 10265.

- [9] O.E. Rössler, "An equation for continuous chaos", *Physics Letters A*, **57** (1976) 397.

Et pour des références moins techniques :

- [10] J. Gleick, *La théorie du Chaos*, Champs, Flammarion, 1992.
- [11] I. Stewart, *Dieu joue-t-il aux dés ?*, Champs, Flammarion, 1998.
- [12] C. Letellier, *Le chaos dans la nature – Histoire et exemples*, Vuibert, à paraître.

4. Une cascade de doublements de période correspond à une succession de changements de la qualité de la solution sous variation d'un paramètre : elle commence habituellement par des oscillations de période T_0 qui se déstabilisent au profit d'une solution de période $2T_0$, puis $4T_0$, $8T_0$, et ainsi de suite jusqu'à une période $2^n T_0$. Le chaos qui fait suite à une telle cascade de doublements de période possède des propriétés très caractéristiques.